DM 08

BCPST Spé

à rendre le lundi 02 décembre

Partie 1 : Relations entre matrices.

On considère les matrices suivantes de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer P^2 puis en déduire que P est inversible et la valeur de P^{-1}.
   (b) Montrer que $P^{-1} \cdot J \cdot P$ et $P^{-1} \cdot K \cdot P$ sont diagonales.
   (c) En déduire une matrice $D(\alpha, \beta)$ diagonale telle que $\alpha J + \beta K = P \cdot D(\alpha, \beta) \cdot P^{-1}$

Partie 2 : étude d'un mouvement aléatoire.

Dans cette partie, p désigne un réel de $[0; 1[$.
Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3 et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4, le sommet 4 au sommet 1, les diagonales reliant le sommet 1 au sommet 3 ainsi que le sommet 2 au sommet 4.
Un pion se déplace sur les sommets du carré selon le protocole suivant :

- Le pion est sur le sommet 1 au départ.
- Lorsque le pion est à un instant donné sur un sommet du carré, il se déplace à l'instant suivant vers un sommet voisin(relié par un côté) avec la probabilité p ou vers un sommet opposé (relié par une diagonale) avec la probabilité $1-2p$.

On note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se trouve le pion à l'instant n. On a donc $X_0 = 1$.

2. (a) Ecrire la matrice A, carrée d'ordre 4, dont le terme situé à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne est égal à la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{X_n=j}(X_{n+1} = i)$.
   (b) Vérifier que A s'écrit comme combinaison linéaire de J et K. (i.e qu'il existe des réels α et β telq que $A = \alpha J + \beta K$)

3. Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on pose $C_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \\ \mathbb{P}(X_n = 4) \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que $C_{n+1} = AC_n$.
   (b) En déduire que $C_n = \frac{1}{4} P \cdot D(p, 1-2p)^n PC_0$, où $D(p, 1-2p)$ est la matrice trouvée au 1c puis donner la loi de probabilité de X_n pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.