Filière BCPST
MATHÉMATIQUES

Épreuve commune aux ENS de Paris, Lyon et Cachan

Session 2008

Réponses

L'usage de calculatrice est interdit. L'objectif de ce sujet est d'étudier les propriétés de modèles simples pour la croissance d'une sous-population de cellules mutantes au sein d'une population de cellules sauvages. Le sujet comporte cinq parties relativement indépendantes et de difficultés variées, pouvant être traitées dans le désordre. Toutefois, les résultats, admis ou démontrés, de la deuxième partie intitulée «Fonctions génératrices» sont censés pouvoir servir dans les trois parties qui suivent. Il est donc recommandé de parcourir le sujet dans son intégralité avant de démarrer. Enfin, il est demandé de veiller au soin de la présentation, à la rigueur et à la concision des raisonnements.

Notations

Le logarithme (neperien) est désigné par ln. L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$ et l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. Par convention, une somme indicée par un ensemble vide est nulle, et un produit indicé par un ensemble vide est égal à 1 . Pour tout entier naturel n, la notation $n!$ désigne le produit des n premiers entiers non nuls, et en particulier $0! = 1$. On rappelle que le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments est noté $\binom{n}{k}$ et vaut $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Si A est un événement tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et B un événement on note $\mathbb{P}(B|A)$ la probabilité conditionnelle de B sachant A.
Une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ sera appelée v.a.e., pour variable aléatoire entière.

Première partie : un modèle déterministe simple

Dans cette partie, on s'intéresse au comportement moyen (non aléatoire), en fonction du temps (entier), d'une population de cellules composée de deux types, les cellules dites sauvages et les cellules dites mutantes. On suppose ici que les cellules ne meurent pas et qu'à chaque pas de temps, chaque cellule sauvage produit en moyenne s cellules filles, et chaque cellule mutante m cellules filles, où m et s sont deux réels positifs. Au temps 0 , la population est constituée d'une seule cellule, et cette cellule est sauvage.

1. Interpréter le modèle suivant :

$$\begin{cases} S_{n+1} = (1+\beta s)S_n \\ M_{n+1} = (1+m)M_n + \alpha s\, S_n \end{cases} \qquad n \geqslant 0$$

ainsi que les réels $\alpha \in]0; 1]$ et $\beta = 1 - \alpha$. Que valent S_0 et M_0 ?

RÉPONSE:

En utilisant $\beta = 1 - \alpha$

$$\begin{cases} S_{n+1} = \underbrace{S_n}_{\text{les cellules de la génération précédente}} + \overbrace{sS_n}^{\text{les cellules filles}} - \underbrace{\alpha s S_n}_{\text{celles devenues mutantes}} \\ M_{n+1} = \underbrace{M_n}_{\text{Les cellules de la génération précédente}} + \overbrace{mM_n}^{\text{les cellules filles}} + \underbrace{\alpha s\ S_n}_{\text{les cellules mutantes}} \end{cases} \quad n \geqslant 0$$

$\boxed{\alpha \text{ est le taux de mutation des nouvelles cellules, } S_0 = 1 \text{ et } M_0 = 0.}$

❀

2. Donner une expression de S_n en fonction de β, s et n.

RÉPONSE:

On reconnaît une suite géométrique de raison $1+\beta s$ et de premier terme 1.

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N},\ S_n = (1+\beta s)^n}$$

❀

3. (a) Soient deux suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liées pour tout entier n par la relation $v_{n+1} = av_n + u_n$, où a est un nombre réel quelconque. Exprimer v_n en fonction de a, de n, de v_0 et des n premiers éléments de la suite u.

RÉPONSE:

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$w_n = \frac{v_n}{a^n}$$

La relation de l'énoncé montre que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad w_{n+1} - w_n = \frac{u_n}{a^{n+1}}$$

donc pour $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} (w_{k+1} - w_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k}{a^{k+1}}$$

par télescopage

$$w_n - w_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k}{a^{k+1}}$$

donc

$$\frac{v_n}{a^n} = v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k}{a^{k+1}}$$

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N},\ v_n = a^n v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} u_k a^{n-k-1}}$$

Remarque : On peut aussi deviner le résultat et le démontrer par récurrence.

❀

(b) Exprimer M_n en fonction de α, β, s, m et n. On distinguera les cas $\beta s = m$ et $\beta s \neq m$.

<u>RÉPONSE:</u>

On applique le résultat précédent à $u_n = \alpha s \mathrm{S}_n$, et $v_n = M_n$ avec $a = (1+m)$.
Pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
M_n &= (1+m)^n M_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (1+m)^{n-k-1} \alpha s \mathrm{S}_k \\
&= 0 + \alpha s \sum_{k=0}^{n-1} (1+m)^{n-k-1} (1+\beta s)^k && \text{question 2} \\
&= \alpha s (1+m)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1+\beta s}{1+m}\right)^k
\end{aligned}$$

On reconnaît alors la somme des termes d'une suite géométriques

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} M_n = n\alpha s(1+m)^{n-1} & \text{si } m = \beta s \\ M_n = \alpha s (1+m)^{n-1} \dfrac{1 - \left(\dfrac{1+\beta s}{1+m}\right)^n}{1 - \left(\dfrac{1+\beta s}{1+m}\right)} & \text{si } m \neq \beta s \end{cases}}$$

❀

4. (a) Suivant la position de βs par rapport à m, établir un équivalent asymptotique, lorsque $n \to +\infty$, de $\mathrm{S}_n, \mathrm{M}_n$, et $\mathrm{M}_n + \mathrm{S}_n$.

<u>RÉPONSE:</u>

Comme d'après l'énoncé $1 + \beta s \neq 0$

$$\boxed{\mathrm{S}_n \underset{n \to +\infty}{\sim} (1+\beta s)^n}$$

On utilise le résultat suivant

$$1 - \gamma^n \underset{n \to +\infty}{\sim} \begin{cases} -\gamma^n \text{ si } \gamma > 1 \\ 1 & \text{si } \gamma < 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\bullet \text{ Si } \beta s = m \text{ alors } M_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\alpha s(1+m)^{n-1} \\ \bullet \text{ Si } \beta s < m \text{ alors } M_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\alpha s(1+m)^{n-1}\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{1+\beta s}{1+m}\right)} \\ \bullet \text{ Si } \beta s > m \text{ alors } M_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -n\alpha s(1+m)^{n-1}\dfrac{\left(\dfrac{1+\beta s}{1+m}\right)^n}{1-\left(\dfrac{1+\beta s}{1+m}\right)}\end{array}}$$

Remarque : Dans les trois cas ces équivalents sont positifs, ce qui cohérent avec l'interprétation en nombre de cellules.

❀

(b) Montrer que la proportion asymptotique de cellules mutantes vaut 1 si $\beta s \leqslant m$, et $\alpha s/(s-m)$ si $\beta s > m$.

Deuxième partie : fonctions génératrices

Pour toute v.a.e. X , on définit f sa fonction génératrice par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n \quad x \in [-1;1]$$

où, par définition, $p_n = \mathbb{P}(X = n)$.

1. Montrer que f est bien définie sur $[-1;1]$, calculer $f(0)$ et $f(1)$.

RÉPONSE:

Soit $x \in [0;1]$. On a pour $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leqslant |p_n x^n| \leqslant p_n |x^n| \leqslant p_n$$

De plus, par définition d'une v.a.e, la série $\sum_{n\geqslant 0} p_n$ est convergente (de somme totale 1), en utilisant le théorème de comparaison sur les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 0} p_n x^n$ converge absolument.

$$\boxed{f \text{ est définie (au moins) sur } [-1;1]}$$

❀

De manière générale, pour toute suite réelle $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on définit formellement la série entière de terme général a_n par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

et l'on cherche notamment à déterminer le domaine de définition de f.
Soit $\mathscr{E}(a)$ l'ensemble suivant :

$$\mathscr{E}(a) = \left\{ r \in \mathbb{R} : \left(a_n r^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\},$$

et $R(a) \geqslant 0$ sa borne supérieure.

2. (a) Montrer que si $\mathrm{R}(a) > 0$, alors pour tout $r \in \left]-\mathrm{R}(a); \mathrm{R}(a)\right[$, les trois propriétés suivantes sont vraies

   i. $r \in \mathscr{E}(a)$
   ii. $\lim_{n\to+\infty} a_n r^n = 0$
   iii. la série de terme général $a_n r^n$ converge absolument.

RÉPONSE:

Remarque : On sait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
On rappelle que la borne supérieure d'un ensemble est le plus petit des majorants de cet ensemble.
La suite $(a_n 0^n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0, 0, 0, \ldots)$ étant bornée, l'ensemble $\mathscr{E}(a)$ est non vide, donc d'après une théorème de première année, la borne supérieure de cet ensemble existe et est positive. Éventuellement dans le cas où $\mathscr{E}(a)$ est non borné, $\mathrm{R}(a) = +\infty$.
Soit $r \in \left]-\mathrm{R}(a); \mathrm{R}(a)\right[$ alors

$$|r| < \mathrm{R}(a)$$

Donc $|r|$ n'est pas un majorant de $\mathscr{E}(a)$, il existe $r_0 \in \mathscr{E}(a)$ tel $|r| < r_0 \leqslant \mathrm{R(a)}$ La suite $\left(\left|a_n r_0^n\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée, or

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left|a_n r^n\right| \leqslant \left|a_n r_0^n\right|$$

ce qui démontre que la suite $\left(\left|a_n r^n\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée.

$$\boxed{r \in \mathscr{E}(a)}$$

Comme $\mathrm{R}(a) > 0$, on peut choisir le réel r_0 précédemment défini strictement positif.
On a pour n entier naturel

$$a_n r^n = a_n r_0^n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$$

Or $\left(a_n r_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée et, comme $|r| < r_0$ $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n = 0$ ce qui démontre

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n r^n = 0.}$$

On note M un majorant de $\left(\left|a_n r_0^n\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\forall n \in \mathbb{N} 0 \leqslant \left|a_n r^n\right| \leqslant \left|a_n r_0^n\right| \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \leqslant M \left|\frac{r}{r_0}\right|^n$$

Comme $\left|\frac{r}{r_0}\right| < 1$ la série $\sum M \left|\frac{r}{r_0}\right|^n$ est convergente. En utilisant le théorème de comparaison sur les séries à termes positifs, la série $\sum \left|a_n r^n\right|$ converge.

$$\boxed{\text{La série de terme général } a_n r^n \text{ converge absolument.}}$$

❀

(b) Montrer que pour tout $r \notin [-\mathrm{R}(a); \mathrm{R}(a)]$, la série de terme général $a_n r^n$ diverge. En déduire deux inclusions entre les ensembles $\left]-\mathrm{R}(a); \mathrm{R}(a)\right[$, $[-\mathrm{R}(a); \mathrm{R}(a)]$ et $\mathscr{E}(a)$.

RÉPONSE:

Soit $r \notin [-\mathrm{R}(a); \mathrm{R}(a)]$. On pose $r' = r$ ou $r' = -r$, pour avoir $r' > \mathrm{R}(a)$. Par définition d'une borne supérieure, $r' \notin \mathscr{E}(a)$. Par définition de $r' \notin \mathscr{E}(a)$, la suite $\left(|a_n r'^n|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, donc $\left(a_n r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée en utilisant la contraposée d'un théorème de première année, cette suite ne peut pas converger

$$\lim_{n\to+\infty} a_n r^n \neq 0$$

$$\boxed{\text{Si } r \notin [-\mathrm{R}(a); \mathrm{R}(a)] \text{ la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n r^n \text{ diverge grossièrement.}}$$

La question 2 permet de montrer que $]-\mathrm{R}(a); \mathrm{R}(a)[\subset \mathscr{E}(a)$, le point précédent montre que $\overline{[-\mathrm{R}(a); \mathrm{R}(a)]} \subset \overline{\mathscr{E}(a)}$

$$\boxed{]-\mathrm{R}(a); \mathrm{R}(a)[\subset \mathscr{E}(a) \subset [-\mathrm{R}(a); \mathrm{R}(a)]}$$

Remarque : On a donc $\mathscr{E}(a) =]-\mathrm{R}(a); \mathrm{R}(a)[$, ou $\mathscr{E}(a) = [-\mathrm{R}(a); \mathrm{R}(a)[$, ou $\mathscr{E}(a) =]-\mathrm{R}(a); \mathrm{R}(a)]$ ou $\mathscr{E}(a) = [-\mathrm{R}(a); \mathrm{R}(a)]$. Et chacun de ces quatre 4 cas peut arriver avec des suites bien choisies.

❀

On appelle $\mathrm{R}(a)$ rayon de convergence de la série entière f.

3. Calculer le rayon de convergence des séries entières de terme général :
   (a) $a_n = c^n$, en fonction de la valeur du nombre réel c ;

RÉPONSE:

Soit x un réel, on étudie la convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} c^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (cx)^n$. D'après le cours cette série converge absolument si et seulement si $|cx| < 1$. On en déduit que

$$\boxed{\text{Si } c \text{ est non nul, } \mathrm{R}(a) = \frac{1}{|c|}}$$

❀

   (b) $a_n = n^\alpha$, en fonction de la valeur du nombre réel α ;

RÉPONSE:

Soit x un réel, on étudie la convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} n^\alpha x^n$.

Soit $x > 0$, le théorème des croissances comparées affirme que si $x < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha x^n = 0$ donc la suite $\left(n^\alpha x^n\right)$ est bornée donc par définition d'une borne supérieure, on a $\mathrm{R}(a) \geqslant 1$. Et si $x > 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha x^n = +\infty$ donc la suite $\left(n^\alpha x^n\right)$ n'est est bornée donc 1 est un majorant de $\mathscr{E}(a)$. par définition d'une borne supérieure, on a $\mathrm{R}(a) \leqslant 1$ et

$$\boxed{\mathrm{R}(a) = 1.}$$

❀

4. Soient f la série entière de terme général a_n et g la série entière de terme général b_n. On suppose que les rayons de convergence $\mathrm{R}(a)$ et $\mathrm{R}(b)$ de f et g respectivement, sont non nuls, et l'on définit $\mathrm{U} = \min(\mathrm{R}(a), \mathrm{R}(b)) > 0$. Soit

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad n \geqslant 0$$

(a) Montrer que la série de terme général $c_n r^n$ converge absolument pour tout $r \in]-\mathrm{U};\mathrm{U}[$.
On admettra par la suite que pour tout $x \in]-\mathrm{U};\mathrm{U}[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = f(x)g(x)$$

RÉPONSE:

Soit x dans $]-\mathrm{U};\mathrm{U}[$
Commençons par supposer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et que x est positif

$$\begin{aligned}
0 \leqslant c_n x^n &= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k b_{n-k} x^{n-k} \\
&\leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_{n-k} x^{n-k}\right) && \text{il y a des termes positifs en plus} \\
&\leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_n x^n\right) && \text{changement d'indice} \\
&\leqslant \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_n x^n\right) && \text{séries convergentes à termes positifs}
\end{aligned}$$

On a donc démontré que $\mathrm{R}(c) \geqslant \mathrm{U}$ et donc que la série entière de terme général c converge absolument sur $]-\mathrm{U};\mathrm{U}[$ (question 2 a iii).
Dans le cas général, on utilise le point précédent avec $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(|b_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\boxed{\text{La série de terme général } c_n r^n \text{ converge absolument pour tout } r \in]-\mathrm{U};\mathrm{U}[.}$$

❀

(b) Montrer que si X et Y sont deux v.a.e. indépendantes dont les fonctions génératrices sont désignées respectivement par f et g, alors la fonction génératrice de $\mathrm{X}+\mathrm{Y}$ est fg.

RÉPONSE:

On sait depuis la question 1 de cette partie que les deux séries génératrices de X et Y ont un rayon de convergence de 1. D'après la question précédente le rayon de convergence de leur produit aussi.

Pour des v.a.e. $X+Y$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et par indépendance

$$\mathbb{P}(X+Y=n)=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)$$

de qui démontre

$$\boxed{\text{La fonction génératrice de } X+Y \text{ est } fg}$$

❀

5. (a) Soit $X_1, X_2, \dots$ une suite de v.a.e. indépendantes et de même loi, de fonction génératrice commune g. Pour tout entier $k \geqslant 1$, donner la fonction génératrice de la v.a.e. $X_1+\cdots+X_k$.

RÉPONSE:

On notant f_X la fonction génératrice de X on peut démontrer par récurrence [1] que

$$\boxed{f_{X_1+\cdots+X_n}=f_X^n.}$$

Remarque : L'exposant désigne une puissance.

❀

(b) Soient N une v.a.e. de fonction génératrice f indépendantes des $X_1, X_2, \dots$ Montrer que la somme $X_1+\cdots+X_N$ est une v.a.e. de fonction génératrice $f\circ g$ (On pourra intervertir des symboles $\sum$ sans justifier).

RÉPONSE:

On note $Y=X_1+X_2+\cdots+X_N$, on admet que c'est une v.a. et on constate qu'elle prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit n un entier naturel

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=n) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(N=k)\mathbb{P}_{N=k}(Y=n) && \text{proba totales}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(N=k)\mathbb{P}_{N=k}(X_1+\cdots+X_k=n) && \text{définition de } Y\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(N=k)\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_k=n) && \text{indépendance de } N \text{ et } X_1+\cdots+X_n \text{ (lemme des coalitions)}
\end{aligned}$$

1. + et * sont associatives

On note f_Y la série génératrice de Y, et en prend x un réel appartenant à $]-1;1[$

$$
\begin{aligned}
f_Y(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=n)x^n && \text{définition}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N=k)\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_k=n)x^n\right] && \text{calculs précédents}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N=k)\mathbb{P}(X_1+\cdots+X_k=n)x^n\right] && \text{inversion admise, liée à la convergence absolue}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\left[\mathbb{P}(N=k)\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1+\cdots+X_k=n)x^n\right]\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\left[\mathbb{P}(N=k)[g(x)]^k\right] && \text{question précédente}\\
&= f\big(g(x)\big) = f\circ g(x) && \text{on sait que } g(x)\in\,]-1;1[
\end{aligned}
$$

❀

Dans la suite, **on admettra** que toute série entière f de terme général a_n est dérivable sur $]-\mathrm{R}(a);\mathrm{R}(a)[$, et que

$$f'(x) = \sum_{n\geqslant 1} n a_n x^{n-1} \quad x\in\,]-\mathrm{R}(a);\mathrm{R}(a)[$$

On pourra également se servir des trois égalités suivantes que l'**on admettra** :

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} \quad x\in\mathbb{R},$$
$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} \quad x\in[-1;1[$$
$$(1-x)^{-a} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n!}x^n \quad a\in\mathbb{R}, x\in\,]-1;1[$$

On admettra enfin qu'un développement en série entière est unique, c'est-à-dire que s'il existe deux suites réelles a et b, et un nombre réel $\mathrm{U}>0$, tels que pour tout $x\in]-\mathrm{U};\mathrm{U}[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

alors $a_n = b_n$ quel que soit $n\geqslant 0$.

Troisième partie : la distribution de Luria-Delbrück

On suppose qu'il existe une suite de réels positifs $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une fonction f continue sur $[-1;1]$, tels que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n \quad x\in[-1;1]$$

et

$$f(x) = (1-x)^{\alpha\frac{1-x}{x}} \quad x\in\,]-1;1[\setminus\{0\},$$

où α est un réel strictement positif.

1. Calculer les limites de f en 0 et en 1 . En déduire que $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$, que l'on appellera distribution (ou loi) de Luria-Delbrück.

RÉPONSE:

Soit $x \in]-1;1[\setminus\{0\}$

$$f(x) = \exp\left(\alpha\frac{1-x}{x}\ln(1-x)\right)$$

Au voisinage de $0^\cdot$, comme $\alpha \neq 0$

$$\alpha\frac{1-x}{x}\ln(1-x) \sim -\alpha(1-x)$$

donc par composition continue

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = \mathrm{e}^{-\alpha}}$$

Au voisinage de 1, on pose $u = 1-x$ et on constate que

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} u = 0^+$$

$$f(x) = \exp\left(\alpha\frac{u}{1-u}\ln(u)\right)$$

et le théorème des croissances comparées et la continuité de l'exponentielle permettent de conclure

$$\boxed{\lim\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \mathrm{e}^0 = 1}$$

On a supposé que f est continue en 1 donc la limite précédente donne $f(1) = 1$, donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n^1 = 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n$$

Les réels (p_n) étant tous positifs.

$$\boxed{\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une loi de probabilité sur } \mathbb{N}}$$

❀

2. En dérivant $\ln(f)$, montrer que

$$\frac{f'}{f}(x) = \alpha\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+2} \quad x \in]-1;1[\setminus\{0\}$$

RÉPONSE:

Soit $x \in]-1;1[$. $f(x) = \exp\left(\alpha \dfrac{1-x}{x} \ln(1-x)\right)$ ce qui montre que $f(x) > 0$ et donc par composition $\ln(f)$ est définie et dérivable sur $]-1;1[$.
Soit $x \in]-1;1[\setminus\{0\}$

$$\begin{aligned}
\ln\big(f(x)\big) &= \alpha \frac{1-x}{x} \ln(1-x) \\
&= -\alpha \frac{1-x}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} && \text{développement en série entière} \\
&= -\alpha (1-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} \\
&= -\alpha \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \right) \\
&= -\alpha \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \right) \\
&= -\alpha \left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} \right) && \text{calcul en isolant le terme n=0}
\end{aligned}$$

En utilisant la règle de dérivation donnée dans la partie précédente

$$\begin{aligned}
\ln\big(f\big)'(x) &= -\alpha \left(0 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n x^{n-1}}{n(n+1)} \right) \\
&= \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n+1} \\
&= \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} && \text{changement d'indice}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } x \in]-1;1[\setminus\{0\},\ \frac{f'}{f}(x) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}}$$

❀

3. (a) Établir la relation de récurrence suivante :

$$n p_n = \alpha \sum_{k=0}^{n-1} \frac{p_k}{n+1-k} \qquad n \geqslant 1$$

RÉPONSE:

Pour $x \in]-1;1[\setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= f(x)\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha \frac{x^n}{n+2} \\
&= \left[\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n\right]\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha \frac{x^n}{n+2}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{(n-k)+2}\right) x^n \text{ partie précédente}
\end{aligned}$$

D'un autre côté en utilisant la règle de dérivation donnée dans la partie précédente :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n p_n x^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) p_{n+1} x^n
\end{aligned}$$

Finalement en utilisant le procédé d'identification donné dans la partie précédente

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (n+1)p_{n+1} = \alpha \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{(n-k)+2}\right)$$

et finalement

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*,\ n p_n = \alpha \sum_{k=0}^{n-1} \frac{p_k}{n+1-k}}$$

❀

(b) Calculer p_1, p_2, p_3.

RÉPONSE:

On sait que f est continue en 0 et que $\lim_{x\to 0} f(x) = \mathrm{e}^{-\alpha} = f(0)$

$$p_0 = \mathrm{e}^{-\alpha}$$

$$\begin{aligned}
1p_1 &= \alpha \frac{p_0}{2-0} \\
2p_2 &= \alpha \left(\frac{p_0}{3} + \frac{p_1}{2}\right) \\
&= \alpha \left(\frac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{3} + \frac{\alpha \mathrm{e}^{-\alpha}}{4}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{p_1 = \frac{\alpha}{2}\mathrm{e}^{-\alpha},\ p_2 = \frac{\alpha \mathrm{e}^{-\alpha}(4+3\alpha)}{24}}$$

❀

4. (a) Écrire $(1-x)\ln(1-x)$ sous la forme d'une série entière sur l'intervalle $]-1;1[$

RÉPONSE:

Soit $x \in]-1;1[$, en utilisant les résultats admis dans la deuxième partie

$$\begin{aligned}(1-x)\ln(1-x) &= -(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} && \text{changement d'indice}\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n(n-1)} - x\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } x \text{ dans }]-1;1[\ (1-x)\ln(1-x) = -x + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n(n-1)}}$$

❀

(b) Soit $a_0 = 0$ et

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad n \geqslant 1$$

Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une loi de probabilité, calculer sa fonction génératrice et son espérance.

RÉPONSE:

Tous les termes a_n sont positifs.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} a_k &= \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k(k+1)}\\ &= \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\\ &= 1 - \frac{1}{N+1}\end{aligned}$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge et vaut 1.

$$\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une loi de probabilité,}}$$

$$\boxed{\text{La fonction génératrice de cette loi est } x \mapsto 1 + \frac{1-x}{x}\ln(1-x)}$$

La série $\sum n a_n$ est divergente (série harmonique).

$$\boxed{\text{Cette loi n'admet pas d'espérance.}}$$

❀

5. (a) Soient $X_1, X_2, \dots$ une suite de v.a.e. indépendantes et de même loi, dont on note g la fonction génératrice commune. Soit N une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\theta > 0$, indépendante de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On définit alors la variable aléatoire Y par

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

Calculer la fonction génératrice de Y.

RÉPONSE:

Un calcul rapide montre que la fonction génératrice d'une loi de poisson de paramètre θ est donnée par $\varphi(x) = e^{\theta(x-1)}$ En utilisant la question II.5.b la fonction génératrice h de Y est donnée pour $x \in]-1;1[$ par

$$h(x) = \varphi \circ g(x) = e^{\theta(g(x)-1)}$$

$$\boxed{\text{La fonction génératrice de } Y \text{ est donnée sur }]-1;1[\text{ par } h(x) = e^{\theta(g(x)-1)}}$$

❀

(b) Trouver g et θ pour que Y suive la loi de Luria-Delbrück.

RÉPONSE:

On constate que si on choisit $\theta = -\alpha$ et que l'on choisi pour loi des X_i la loi étudier dans III.4.b alors la fonction génératrice de Y est égale à f fonction génératrice de la loi de Luria-Delbrück. Par unicité du développement en série entière

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y = n) = p_n$$

❀

Quatrième partie : étude succincte du modèle de Luria-Delbrück

On considère une population de cellules sauvages et mutantes. Au temps 0 , la population démarre avec une seule cellule, qui est sauvage. À chaque pas de temps $1, 2, 3, \dots$, une cellule et une seule, prise au hasard (uniformément) dans la population, se divise en deux; par conséquent, entre les temps $n-1$ et n, le nombre de cellules est n. On se donne un nombre réel $\alpha \in [0;1]$, qui est la probabilité de mutation, et l'on note $\beta = 1-\alpha$:

- lorsqu'une cellule sauvage se divise, elle se divise en deux cellules sauvages avec probabilité β; avec probabilité α, en une cellule sauvage et une cellule mutante;
- lorsqu'une cellule mutante se divise, elle se divise toujours en deux cellules mutantes. On note $\mathbb{P}_\alpha$ la probabilité associée à ce modèle.

On désigne par S_n le nombre de cellules sauvages présentes dans la population entre les temps $n-1$ et n, et par $M_n = n - S_n$ le nombre de cellules mutantes. Enfin, on empruntera les notations suivantes :

$$p_s(n,k;\alpha) = \mathbb{P}_\alpha(S_n = k) \quad \text{et} \quad p_m(n,k;\alpha) = \mathbb{P}_\alpha(M_n = k)$$

pour tous entiers naturels k et n.

1. **Questions préliminaires**
On **admet** le résultat suivant : Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ telle que pour tout entier naturel n, $A_n \subset A_{n+1}$ alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

(a) Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ telle que pour tout entier naturel n, $B_{n+1} \subset B_n$, montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n)$$

RÉPONSE:

On pose pour $n \in \mathbb{N}$ $A_n = \overline{B_n}$, on a alors

$$\forall n \in \mathbb{N} A_n \subset A_{n+1}$$

On peut donc appliquer le résultat admis

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

c'est à dire

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\overline{B_n})$$

en passant au complémentaire

$$\boxed{\text{Si pour tout entier naturel } n,\ B_{n+1} \subset B_n \text{ alors } \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n)}$$

❀

(b) Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{N} C_n\right)$$

et

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} C_n\right)$$

RÉPONSE:

Posons pour $n \in \mathbb{N}$

$$A_n = \bigcup k = 0^n C_k$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad A_n \subset A_{n+1}$$

et

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_k = \bigcup_{n=0}^{+\infty} C_k$$

En appliquant le théorème admis

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} C_n\right)}$$

Pour le deuxième point on pose pour $n \in \mathbb{N}$

$$B_n = \bigcup_{k=0}^{n} C_k$$

et on utilise la question 1a de cette partie.

❀

2. (a) Donner $p_m(n,k;\alpha)$ pour tout $k \geqslant n$.

RÉPONSE:

La population de cellules sauvages n'augmente au maximum que d'une cellule à chaque étape, et la population à l'instant 1 est de 0 . Donc S_n est toujours plus petit que n/

$$\boxed{\text{Pour tout } k \geqslant n \ p_m(n,k;\alpha)\ .}$$

❀

(b) Lorsque $\alpha \neq 0$, donner la loi du temps d'apparition de la première cellule mutante, ainsi que son espérance.

RÉPONSE:

On reconnaît une loi géométrique de paramètre α et d'espérance $1/\alpha$.

❀

3. (a) Montrer que la suite $(\mathrm{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite, finie ou infinie, que l'on notera M_∞. On cherche à calculer $\mathbb{P}_\alpha(\mathrm{M}_\infty = +\infty)$.

RÉPONSE:

À chaque étape, soit une cellules sauvage se divise pouvant faire apparaître une cellule mutante supplémentaire, ou bien une cellule mutante se divise faisant apparaître à coup sûr une cellule mutante supplémentaire.

La suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

En appliquant le théorème de la limite monotone :

$$\boxed{\text{La suite } (\mathrm{M}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ a une limite, finie ou infinie.}}$$

❀

(b) Soient k, n_0, p des entiers non nuls. Établir l'égalité suivante :

$$\mathbb{P}_\alpha\left(\mathrm{M}_n = k, \forall n \in \{n_0+1,\dots,n_0+p+1\} \middle| \mathrm{M}_{n_0} = k\right) = \prod_{i=n_0}^{n_0+p} \frac{(1-\alpha)(i-k)}{i}$$

RÉPONSE:

Il faut interpréter les notations :

$$\mathbb{P}_\alpha\left(\mathrm{M}_n = k, \forall n \in \{n_0+1,\dots,n_0+p+1\} \mid \mathrm{M}_{n_0}=k\right) = \mathbb{P}_\alpha\left(\bigcap_{n=n_0+1}^{n_0+p+1}[\mathrm{M}_n = k] \middle| \mathrm{M}_{n_0}=k\right)$$

On cherche à calculer la probabilité, sachant qu'à l'étape n_0 la population de cellules mutante est égale à k , qu'elle n'augmente pas lors des p étapes suivantes. C'est à dire que durant les étapes n_0+1 , ..., n_0+p+1 une cellule sauvage se divise et que cette cellule se divise en deux cellules sauvages.
On constate que pour tout entier n $M_n+S_n=k$ car la population. initiale d'une cellule n'augmente exactement d'une cellule à chaque étape.
On choisit [2] de faire une démonstration par récurrence en fixant n_0 et k.

Initialisation[3] Pour $p=0$, on calcule $\mathbb{P}_\alpha(M_{n_0+1}=k \mid M_{n_0}=k)$ Supposons que $[M_{n_0}=k]$ est réalisé, alors la population est constituée de k cellules mutantes et n_0-k cellules sauvages. La probabilité qu'une cellule sauvage se divise et qu'elle ne donne naissance qu'à des cellules sauvages est

$$\frac{n_0-k}{n_0}\times(1-\alpha)$$

donc

$$\mathbb{P}_\alpha(M_{n_0+1}=k \mid M_{n_0}=k) = \frac{n_0-k}{n_0}\times(1-\alpha) = \prod_{i=n_0}^{n_0+0}\frac{(1-\alpha)(i-k)}{i}$$

Hérédité Soit $p\in\mathbb{N}$ supposons avoir montré que

$$\mathbb{P}_\alpha\left(\bigcap_{n=n_0+1}^{n_0+p+1}[\mathrm{M}_n = k] \middle| \mathrm{M}_{n_0}=k\right) = \prod_{i=n_0}^{n_0+p}\frac{(1-\alpha)(i-k)}{i}$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\alpha\left(\bigcap_{n=n_0+1}^{n_0+p+2}[\mathrm{M}_n = k] \middle| \mathrm{M}_{n_0}=k\right) &= \mathbb{P}_\alpha\left(\left[\bigcap_{n=n_0+1}^{n_0+p+1}[\mathrm{M}_n = k]\right]\cap[\mathrm{M}_{n_0+p+2}=k] \middle| \mathrm{M}_{n_0}=k\right)\\ &= \mathbb{P}_\alpha\left(\left[\bigcap_{n=n_0+1}^{n_0+p+1}[\mathrm{M}_n = k]\right] \mid [\mathrm{M}_{n_0}=k]\right)\mathbb{P}_\alpha\left([\mathrm{M}_{n_0+p+2}=k] \middle| [\mathrm{M}_{n_0}=k]\cap\left[\bigcap_{n=n_0+1}^{n_0+p+1}[\mathrm{M}_n = k]\right]\right)\end{aligned}$$

en exercice montrer que $\mathbb{P}(A\cap B\mid C) = \mathbb{P}(B\mid C)\mathbb{P}(A\mid B\cap C)$

$$\begin{aligned}&= \prod_{i=n_0}^{n_0+p}\frac{(1-\alpha)(i-k)}{i}\mathbb{P}_\alpha\left([\mathrm{M}_{n_0+p+2}=k] \middle| [\mathrm{M}_{n_0}=k]\cap\left[\bigcap_{n=n_0+1}^{n_0+p+1}[\mathrm{M}_n = k]\right]\right) && \text{HR}\\ &= \left[\prod_{i=n_0}^{n_0+p}\frac{(1-\alpha)(i-k)}{i}\right]\frac{n_0+p+1-k}{n_0+p+1}(1-\alpha) && \text{voir ci dessous}\\ &= \prod_{i=n_0}^{n_0+p+1}\frac{(1-\alpha)(i-k)}{i}\end{aligned}$$

Si on suppose $[]\mathrm{M}_{n_0}=k]\cap\left[\bigcap_{n=n_0+1}^{n_0+p+1}[\mathrm{M}_n=k]\right]$ réalisé alors entre les étapes n_0 et n_0+p+1 la population de cellules mutantes est restée constante égale à k et seule la population de cellules sauvages à augmenter pour atteindre $n_0+p+1-k$.

Conclusion D'après le principe de récurrence

2. On peut aussi utiliser le théorème des probabilités composées ou faire une démonstration moins formelle.

Pour tout k, n_0, p des entiers non nuls on a montré que :

$$\mathbb{P}_\alpha\left(\mathrm{M}_n = k, \forall n \in \{n_0+1, \ldots, n_0+p+1\} \middle| \mathrm{M}_{n_0} = k\right) = \prod_{i=n_0}^{n_0+p} \frac{(1-\alpha)(i-k)}{i}$$

❀

(c) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels appartenant à l'intervalle $]0;1[$. Montrer que la suite $\prod_{k=0}^{n} a_k$ est convergente, et que sa limite est nulle si et seulement si la série de terme général $\ln(a_n)$ diverge.

RÉPONSE:

On pose pour $n \in \mathbb{N}$

$$r_n = \prod_{k=0}^{n} a_k$$

On constate que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad r_{n+1} = a_{n+1} r_n$$

donc comme pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \in]0;1]$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 < r_{n+1} \leqslant r_n$$

La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0.

$$\boxed{\text{La suite } \left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente.}}$$

La limite de $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $[0;1]$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \ln(r_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln(a_n)$$

Tous les ln sont bien définis et négatifs, la série $\sum_{k=0}^{n} \ln(a_n)$ converge ou tend vers $-\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} r_n = 0 &\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \ln(r_n) = -\infty \\ &\Leftrightarrow \text{ la série } \sum_{k=0}^{n} \ln(a_n) \text{ diverge vers } -\infty \\ &\Leftrightarrow \text{ la série } \sum_{k=0}^{n} \ln(a_n) \text{ diverge}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La limite de } \left(\prod_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est nulle si et seulement si la série de terme général } \ln(a_n) \text{ diverge.}}$$

❀

(d) i. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, même si $\alpha = 0$,

$$\mathbb{P}_\alpha\left(\mathrm{M}_n = k, \forall n \geqslant n_0 + 1 \mid \mathrm{M}_{n_0} = k\right) = 0$$

RÉPONSE:

On sait que

$$\forall x \in]-1; +\infty[\qquad \ln(1+x) \leqslant x$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \ln\left(\frac{(1-\alpha)(i-k)}{i}\right) = \ln(1-\alpha) + \ln\left(1 - \frac{k}{i}\right) \leqslant -k\frac{1}{i} < 0$$

donc en fixant n_0,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \sum_{i=n_0}^{n_0+p} \frac{(1-\alpha)(i-k)}{i} \leqslant -k \sum_{k=n_0}^{n_0+p} \frac{1}{i}$$

Donc comme la série harmonique diverge vers $+\infty$

$$\lim_{p \to +\infty} \sum_{i=n_0}^{n_0+p} \ln\left(\frac{(1-\alpha)(i-k)}{i}\right) = -\infty$$

En utilisant (en l'adaptant légèrement) le résultat de la question précédente

$$\lim_{p \to +\infty} \prod_{i=n_0}^{n_0+p} \frac{(1-\alpha)(i-k)}{i} = 0$$

En utilisant le résultat de la question IV 1 avec la probabilité $\mathbb{P}\alpha(\bullet|M_n = k)$

$$\mathbb{P}_\alpha\left(\bigcap_{n=n_0+1}^{+\infty} [\mathrm{M}_n = k] \middle| \mathrm{M}_{n_0} = k\right) = \lim_{p \to +\infty} \mathbb{P}_\alpha\left(\bigcap_{n=n_0+1}^{n_0+p+1} [\mathrm{M}_n = k] \middle| \mathrm{M}_{n_0} = k\right) = 0$$

$$\boxed{\mathbb{P}_\alpha\left(\mathrm{M}_n = k, \forall n \geqslant n_0 + 1 \mid \mathrm{M}_{n_0} = k\right) = 0}$$

❀

ii. En déduire que $\mathbb{P}_\alpha(\mathrm{M}_\infty = k) = 0$ pour tout $k \geqslant 1$.

RÉPONSE:

On peut démontrer en utilisant la définition de la limite d'une suite
Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs entières converge vers l'entier k, alors il existe un rang n_0 tel que pour tout entier p, on a $u_{n_0+p} = k$, c'est à dire que la suite est stationnaire.

Supposons que $\lim_{n\to+\infty} M_n = k$ alors la suite M_n est stationnaire égale à k à partir d'un certain rang

$$\mathbb{P}_\alpha(M_\infty = k) = \sum_{n_0 \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(M_{n_0} = k)\mathbb{P}_\alpha(M_n = k \quad \forall n \geqslant n_0 | M_{n_0} = k)$$

D'après la question précédente tous les termes de cette somme sont nuls

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathbb{P}_\alpha(\mathrm{M}_\infty = k) = 0}$$

❀

(e) Donner la valeur de $\mathbb{P}_\alpha\,(\mathrm{M}_\infty = +\infty \text{ ou } 0)$, et en déduire, selon la valeur de α, celles de $\mathbb{P}_\alpha\,(\mathrm{M}_\infty = 0)$ et de $\mathbb{P}_\alpha\,(\mathrm{M}_\infty = +\infty)$.

RÉPONSE:

Comme $M_\infty(\Omega) = \mathbb{N} \cap +\infty$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}_\alpha(M_\infty = k) = 1$$

et en utilisant la réponse précédente

$$\mathbb{P}_\alpha([M_\infty = 0) + \mathbb{P}_\alpha([M_\infty = +\infty) = 1$$

$$\boxed{\mathbb{P}_\alpha\,(\mathrm{M}_\infty = +\infty \text{ ou } 0) = 1}$$

Si $\alpha = 0$, il n'y a aucune mutation et la population initiale de mutantes est nulle.

$$\boxed{\text{Si } \alpha = 0,\ \mathbb{P}(M_{+\infty} = 0) = 1,\ \mathbb{P}(M_{+\infty} = +\infty) = 0.}$$

Supposons $\alpha \in]0;1]$. On sait que le temps d'apparition de la première mutation suit une loi géométrique , il est presque certain qu'une mutation apparaissent

$$\mathbb{P}_\alpha(\bigcap_{n\geqslant 0} M_n = 0) = 0$$

$$\boxed{\text{Si } \alpha =\neq 0,\ \mathbb{P}(M_{+\infty} = 0) = 0,\ \mathbb{P}(M_{+\infty} = +\infty) = 1.}$$

❀

Cinquième partie : loi du nombre de cellules mutantes

Le but de cette partie est d'établir explicitement la loi de M_n, puis d'obtenir son comportement asymptotique lorsque la probabilité de mutation est faible, de l'ordre de $1/n$. On rappelle avoir défini $p_s(n,k;\alpha) = \mathbb{P}_\alpha\,(\mathrm{S}_n = k)$ et $p_m(n,k;\alpha) = \mathbb{P}_\alpha\,(\mathrm{M}_n = k)$.

1. Montrer la relation de récurrence suivante pour tous entiers naturels k et n :

$$p_s(n+1,k+1;\alpha) = \frac{k}{n}\beta p_s(n,k;\alpha) + \left(1 - \frac{k+1}{n}\beta\right) p_s(n,k+1;\alpha).$$

RÉPONSE:

Soit n et k fixés.

$$\begin{aligned}
p_s(n+1,k+1;\alpha) &= \mathbb{P}_\alpha(S_{n+1}=k+1)\\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}_\alpha(S_{n+1}=k+1|S_n=i)\mathbb{P}_\alpha(S_n=i) \qquad \text{proba totales avec S.C.E. } ([S_n=i])_{i\in\mathbb{N}^*}\\
&= \sum_{i=k}^{k+1} \mathbb{P}_\alpha(S_{n+1}=k+1|S_n=i)\mathbb{P}_\alpha(S_n=i) \qquad \text{La population mutante reste stable ou augmente de 1}\\
&= \mathbb{P}_\alpha(S_{n+1}=k+1|S_n=k)\mathbb{P}_\alpha(S_n=k)+\mathbb{P}_\alpha(S_{n+1}=k+1|S_n=k+1)\mathbb{P}_\alpha(S_n=k+1)\\
&= \mathbb{P}_\alpha(S_{n+1}=k+1|S_n=k)\mathbb{P}_s(n,k;\alpha)+\mathbb{P}_\alpha(S_{n+1}=k+1|S_n=k+1)\mathbb{P}_s(n,k+1;\alpha)
\end{aligned}$$

Or

$$\mathbb{P}_\alpha(S_{n+1}=k+1|S_n=k) = \underbrace{\frac{k}{n}}_{\text{une C sauvage se divise}} \times \underbrace{(1-\alpha)}_{\text{en deux C sauvages}} = \frac{k\beta}{n}$$

et

$$\mathbb{P}_\alpha(S_{n+1}=k+1|S_n=k+1) = \underbrace{\frac{n-(k+1)}{n}}_{\text{une C mutante se divise}} \times 1 + \underbrace{\frac{k+1}{n}}_{\text{ou une C sauvage se divise}} \times \underbrace{\alpha}_{\text{et donne une C mutante}} = 1\frac{(k+1)\beta}{n}$$

$$\boxed{\text{Pour tous entiers naturels } k \text{ et } n : p_s(n+1,k+1;\alpha) = \frac{k}{n}\beta p_s(n,k;\alpha)+\left(1-\frac{k+1}{n}\beta\right)p_s(n,k+1;\alpha).}$$

❀

2. Montrer que pour tous entiers naturels k et n,

$$p_s(n,k;\alpha) = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\binom{k-1}{i-1}\prod_{j=1}^{n-1}(j-i\beta)$$

<u>RÉPONSE:</u>

On va démontrer par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$

$$\mathscr{H}_n \;:\; \forall k\in\mathbb{N} \qquad p_s(n,k;\alpha) = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\binom{k-1}{i-1}\prod_{j=1}^{n-1}(j-i\beta)$$

Initialisation n=1

D'après l'énoncé, le nombre de cellules sauvage entre les instants 0 et 1 est 1

$$p_s(1,k:\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } k=1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

D'un autre coté pour $k\in\mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-1)!}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\binom{k-1}{i-1}\prod_{j=1}^{1-1}(j-i\beta) &= \frac{1}{1}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\binom{k-1}{i-1} && \text{introduction produit sur un ensemble vide}\\
&= \sum_{\ell=0}^{k-1}(-1)^{\ell}\binom{k-1}{\ell} && \text{chg d'indice}\\
&= (1-1)^{k-1} && \text{formule du binôme}\\
&= \begin{cases} 1 & \text{si } k-1=0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{H}_1$ est bien vérifiée. Si $k=0$ le symbole $\sum$ porte sur un ensemble vide, donc vaut 0 et la formule est vraie

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathscr{H}_n$ vérifiée *i.e.*

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad p_s(n,k;\alpha) = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\binom{k-1}{i-1}\prod_{j=1}^{n-1}(j-i\beta)$$

Si $k=0$ le symbole $\sum$ porte sur un ensemble vide, donc vaut 0 et comme le nombre de cellules sauvage ne fait qu'augmenter $p(n+1,0;\alpha)=0$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
p_s(n+1,k;\alpha) &= \frac{k-1}{n}\beta p_s(n,k-1;\alpha) + \left(1-\frac{k}{n}\beta\right)p_s(n,k;\alpha) && \text{question précédente}\\
&= \frac{k-1}{n}\beta\frac{1}{(n-1)!}\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i-1}\binom{k-2}{i-1}\prod_{j=1}^{n-1}(j-i\beta) + \left(1-\frac{k}{n}\beta\right)\frac{1}{(n-1)!}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\binom{k-1}{i-1}\prod_{j=1}^{n-1}(j-i\beta) && \mathscr{H}_n\\
&= \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{k-1}{n}\beta\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i-1}\binom{k-2}{i-1}\prod_{j=1}^{n-1}(j-i\beta) + \left(1-\frac{k}{n}\beta\right)\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\binom{k-1}{i-1}\prod_{j=1}^{n-1}(j-i\beta)\right]\\
&= \frac{1}{n!}\left[(k-1)\beta\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i-1}\binom{k-2}{i-1}\prod_{j=1}^{n-1}(j-i\beta) + (n-k\beta)\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\binom{k-1}{i-1}\prod_{j=1}^{n-1}(j-i\beta)\right]\\
&= \frac{1}{n!}\left[(k-1)\beta\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\binom{k-2}{i-1}\prod_{j=1}^{n-1}(j-i\beta) + (n-k\beta)\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\binom{k-1}{i-1}\prod_{j=1}^{n-1}(j-i\beta)\right] && \text{terme rajouté nul}\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{k}\left[(-1)^{i-1}\left[\beta(k-1)\binom{k-2}{i-1} + (n-k\beta)\binom{k-1}{i-1}\right]\prod_{j=1}^{n-1}(j-i\beta)\right]\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{k}\left[(-1)^{i-1}\left[\beta i\binom{k-1}{i} + (n-k\beta)\binom{k-1}{i-1}\right]\prod_{j=1}^{n-1}(j-i\beta)\right] && \text{petite formule}\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{k}\left[(-1)^{i-1}\left[n\binom{k-1}{i-1} + \beta\left(i\binom{k-1}{i} - k\binom{k-1}{i-1}\right)\right]\prod_{j=1}^{n-1}(j-i\beta)\right]\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{k}\left[(-1)^{i-1}\left[n\binom{k-1}{i-1} + \beta\left(i\binom{k-1}{i} - i\binom{k}{i}\right)\right]\prod_{j=1}^{n-1}(j-i\beta)\right] && \text{petite formule}\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{k}\left[(-1)^{i-1}\left[n\binom{k-1}{i-1} + \beta\left(-i\binom{k-1}{i-1}\right)\right]\prod_{j=1}^{n-1}(j-i\beta)\right] && \text{formule } \binom{k}{i} = \binom{k-1}{i} + \binom{k-1}{i-1}\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{k}\left[(-1)^{i-1}(n-\beta i)\binom{k-1}{i-1}\prod_{j=1}^{n-1}(j-i\beta)\right]\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{k}\left[(-1)^{i-1}\binom{k-1}{i-1}\prod_{j=1}^{n}(j-i\beta)\right]
\end{aligned}$$

Conclusion D'après le principe de récurrence

❀

3. Montrer également que pour tous entiers $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$p_m(n,k;1/2) = \binom{n+k-1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-1}$$

RÉPONSE:

On montre comme en V.1

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^* \qquad p_m(n+1,k;\frac{1}{2}) = \frac{k-1}{n}p_m(n,k-1;\frac{1}{2}) + \frac{k}{2n}p_m(n,k;\frac{1}{2})$$

Puis on pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathscr{G}_n \ : \qquad \forall k \in [\![0,n]\!], \qquad p_m(n,k;1/2) = \binom{n+k-1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-1}$$

Initialisation Pour $n=1$, la cellule sauvage initiale se divise à coup sûr, et la probabilité de donner une cellule mutante est de 1/2, donc

$$p_m(1,1;1/2)=\frac{1}{2}$$

et

$$\binom{1+1-1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1+1-1}=\frac{1}{2}$$

et en passant au complémentaire

$$p_m(1,0;1/2)=\frac{1}{2}$$

$$\binom{1+0-1}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{1+0-1}=\frac{1}{2}$$

Hérédité Soit $n\in\mathbb{N}$ supposons $\mathscr{G}_n$ réalisé

Si $k=0$ alors la probabilité qu'il n'y ait aucune cellule mutante après $n+1$ divisions est égale à

Conclusion D'après le principe de récurrence

Remarque : Il est peut être possible de trouver une démonstration en partant de $\mathbb{P}_m(n,k,\alpha)=\mathbb{P}_m(n,n-k,\alpha)$ et en utilisant le résultat de la question précédente ?

❀

4. À partir de maintenant, pour tout $k\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[-1;1]$, on définit

$$\gamma_k(x;\alpha)=\sum_{n=1}^{+\infty}p_s(n,k;\alpha)x^{n-1}$$

(a) Montrer que γ_k est bien définie.

RÉPONSE:

On a pour k et α fixés

$$\sum_{n=1}^{+\infty}p_s(n,k;\alpha)=1$$

donc de la même façon que II.1

$$\forall x\in[-1;1]\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}p_s(n,k;\alpha)x^{n-1}\text{converge absolument}$$

$$\boxed{\gamma_k \text{ est bien définie sur (au moins) } [-1;1].}$$

❀

(b) Établir l'égalité suivante en utilisant la question 2 et sans justifier les interversions de sommes :

$$\gamma_k(x;\alpha)=c(1-x)^{-\delta}\left(1-(1-x)^{\eta}\right)^{k-1}\quad x\in[-1;1]$$

où c,δ, et η sont des nombres réels positifs à déterminer.

RÉPONSE:

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1;1]$ fixés.

$$\begin{aligned}
\gamma_k(x;\alpha) &= \sum_{n=1}^{+\infty} p_s(n,k,\alpha)x^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n-1)!}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\binom{k-1}{i-1}\prod_{j=1}^{n-1}(j-i\beta)\right)x^{n-1} && \text{question 2} \\
&= \sum_{i=1}^{k}\left[(-1)^{i-1}\binom{k-1}{i-1}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}\prod_{j=1}^{n-1}(j-i\beta)x^{n-1}\right] && \text{inversion } \textstyle\sum \text{ et factorisations} \\
&= \sum_{i=1}^{k}\left[(-1)^{i-1}\binom{k-1}{i-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\prod_{j=1}^{n}(j-i\beta)x^{n}\right] && \text{chg indice } n'=n-1 \\
&= \sum_{i=1}^{k}\left[(-1)^{i-1}\binom{k-1}{i-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{0-i\beta}\prod_{j=1}^{n}(j-1+1-i\beta)x^{n}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{k}\left[(-1)^{i-1}\binom{k-1}{i-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}(j+1-i\beta)x^{n}\right] \quad \text{chg indice } j'=j-1 \\
&= \sum_{i=1}^{k}\left[(-1)^{i-1}\binom{k-1}{i-1}(1-x)^{-1+i\beta}\right] && \text{troisième série de II.5.b} \\
&= (1-x)^{-1}\sum_{i=1}^{k}\left[(-1)^{i-1}\binom{k-1}{i-1}\left((1-x)^{\beta}\right)^{i}\right] \\
&= (1-x)^{-1}\sum_{i=0}^{k-1}\left[(-1)^{i}\frac{1}{i+1}\binom{k-1}{i}\left((1-x)^{\beta}\right)^{i+1}\right] && \text{chg indice} i'=i-1 \\
&= (1-x)^{\beta-1}\sum_{i=0}^{k-1}\left[\binom{k-1}{i}\left(-(1-x)^{\beta}\right)^{i}\right] \\
&= (1-x)^{-(1-\beta)}\left[1-(1-x)^{\beta}\right]^{k-1} && \text{formule du binome}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } k\in\mathbb{N} \text{ et } x\in[-1;1],\ \gamma_k(x;\alpha) = (1-x)^{-(1-\beta)}\left[1-(1-x)^{\beta}\right]^{k-1}}$$

Remarque : comme $\beta \in]0;1[$, $\delta = 1-\beta$ est strictement positif.

❀

5. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$x^{1-k}\gamma_k(x;\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_m(n+k,n;\alpha)x^n \quad x\in[-1;1].$$

RÉPONSE:

Soit $x \in [-1;1]$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} p_m(n+k,n;\alpha)x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_s(n+k,k;\alpha)x^n && \text{à l'instant } n+ \text{ la population est de } n+k\\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} p_s(n,k;\alpha)x^{n-k} && \text{chg d'indice } n'=n+k\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} p_s(n,k;\alpha)x^{n-k} && \text{si } n<k \text{ alors } p_s(n,k)=0\\
&= x^{1-k}\sum_{n=1}^{+\infty} p_s(n,k;\alpha)x^{n-1}\\
&= x^{1-k}\gamma_k(x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [-1;1]\,;\ x^{1-k}\gamma_k(x;\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_m(n+k,n;\alpha)x^n}$$

❀

6. (a) Pour tout $x \in]0;1[$, établir la limite suivante :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1} \ln\left(\frac{1-e^{(1-\varepsilon)\ln(1-x)}}{x}\right) = \frac{1-x}{x}\ln(1-x)$$

RÉPONSE:

On pose pour $x \in]0;1[$ fixé

$$\varphi : \begin{array}{ccc}]-\infty;1[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \ln\left(\frac{1-e^{(1-t)\ln(1-x)}}{x}\right) \end{array}$$

Cette fonction est dérivable comme composée définie de fonctions dérivables

$$\forall t \in]-\infty;1[\qquad \varphi'(t) = \frac{\ln(1-x)e^{(1-t)\ln(1-x)}}{1-e^{(1-t)\ln(1-x)}}$$

Notamment $\varphi'(0) = \dfrac{\ln(1-x)(1-x)}{x}$,or

$$\varphi'(0) = \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-1}(\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)) = \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-1}\ln\left(\frac{1-e^{(1-\varepsilon)\ln(1-x)}}{x}\right)$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]0;1[,\ \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1} \ln\left(\frac{1-e^{(1-\varepsilon)\ln(1-x)}}{x}\right) = \frac{1-x}{x}\ln(1-x)}$$

❀

(b) En déduire que pour tout $x \in]0;1[$,

$$\lim_{n\to+\infty} x^{1-n}\gamma_n(x;\alpha/n) = (1-x)^{\alpha\frac{1-x}{x}}$$

RÉPONSE:

En utilisant la question 4 b de cette partie, pour $x \in]0;1[$ fixé et pour $n \in \mathbb{N}$

$$\gamma_n(x;\alpha/n) = (1-x)^{-(\alpha/n)}\left[1-(1-x)^{\alpha/n}\right]^{n-1}$$

donc

$$\begin{aligned}
x^{1-n}\gamma_n(x;\alpha/n) &= (1-x)^{-(\alpha/n)}\left[\frac{1-(1-x)^{1-\alpha/n}}{x}\right]^{n-1} \\
&= (1-x)^{-(\alpha/n)}\exp\left((n-1)\ln\left(\frac{1-(1-x)^{1-\alpha/n}}{x}\right)\right) && \text{argument du ln strict positif } (x\in]0;1[) \\
&= (1-x)^{-(\alpha/n)}\exp\left(\alpha\frac{n-1}{n}\times\frac{n}{\alpha}\ln\left(\frac{1-(1-x)^{1-\alpha/n}}{x}\right)\right) \\
&= \exp(-\varepsilon\ln(1-x))\left(\exp\left(\alpha(1-\varepsilon)\varepsilon^{-1}\ln\left(\frac{1-(1-x)^{1-\varepsilon}}{x}\right)\right)\right) && \text{en posant } \varepsilon=\alpha/n
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty}\varepsilon = 0$, on peut utiliser la question précédente

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} x^{1-n}\gamma_n(x;\alpha/n) &= \exp(0)\exp\left(\alpha\frac{1-x}{x}\ln(1-x)\right) && \text{continuité exp} \\
&= (1-x)^{\alpha\frac{1-x}{x}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x\in]0;1[,\ \lim_{n\to+\infty} x^{1-n}\gamma_n(x;\alpha/n) = (1-x)^{\alpha\frac{1-x}{x}}}$$

❀

7. Expliquer pourquoi la distribution $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dite de Luria-Delbrück de la troisième partie fournit un candidat pour la limite p_k de $\mathbb{P}_{\alpha/n}(\mathrm{M}_n = k)$, et donner le ou les principaux obstacles à une démonstration mathématique rigoureuse.

RÉPONSE:

D'après la question 5 de cette partie, pour tout $x \in [-1;1]$;

$$x^{1-n}\gamma_k(x;\alpha/n) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_m(k+n,k;\alpha/n)x^k$$

donc

$$x^{1-n}\gamma_k(x;\alpha/n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{\alpha/n}(M_{n+k}=k)x^k$$

Si on peut justifier le passage à la limite $n\to+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} x^{1-n}\gamma_k(x;\alpha/n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_{\alpha/n}(M_{n+k}=k)x^k$$

puis la simplification

$$\lim_{n\to+\infty} x^{1-n}\gamma_k(x;\alpha/n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_{\alpha/n}(M_n=k)x^k$$

et finalement si on peut justifier l'utilisation du principe d'identification, alors que nous avons démontré une égalité sur $]0;1[$ et non $]-\delta;\delta[$, en utilisant le résultat de la troisième partie, on aurait démontré ce que l'on veut.

❀