

DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

23 SEPTEMBRE 2023

Durée de l'épreuve : 2h

L'utilisation de la calculatrice, ou de tout autre appareil électronique (téléphone portable, ordinateur...), est **interdite**.

Le devoir comporte deux problèmes indépendants. Les deux premières parties du problème 1 sont d'une difficulté inférieure à celle du reste du devoir.

PROBLÈME 1 : NIVEAU 1

Dans tout l'exercice, a est un réel strictement positif.

Partie A : Étude d'une fonction d'une variable réelle

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\forall x > 0, \varphi(x) = \ln(x) - ax^{2a}$.

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$.
- Étudier les variations de φ et dresser son tableau de variations complet.

On fera apparaître dans ce tableau le réel $x_0 = \left(\frac{1}{2a^2}\right)^{(1/2a)}$.

- Démontrer que si $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions z_1 et z_2 vérifiant $z_1 < x_0 < z_2$.
Que se passe-t-il si $a = \sqrt{\frac{1}{2e}}$? Si $a > \sqrt{\frac{1}{2e}}$?

Partie B : Une fonction de deux variables réelles

Soit f la fonction définie sur le pavé ouvert $U = (\mathbb{R}^{+*})^2$ par :

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = \ln(x) \ln(y) - (xy)^a.$$

- Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U .
- Calculer les dérivées partielles premières de f .
- Démontrer que pour tout $(x, y) \in U$: (x, y) est un point critique de $f \iff \begin{cases} x = y, \\ \varphi(x) = 0. \end{cases}$
- a) On suppose dans cette question que $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$. Justifier rigoureusement que les seuls points où f est susceptible d'admettre un extremum sont (z_1, z_1) et (z_2, z_2) , où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie A.
b) Qu'en est-il si $a = \sqrt{\frac{1}{2e}}$? Si $a > \sqrt{\frac{1}{2e}}$?

Partie C : Extremum locaux de f

Dans cette partie on suppose que $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$. On rappelle que les seuls points de U où f est susceptible d'admettre un extremum sont (z_1, z_1) et (z_2, z_2) , où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie A.

- Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f en tout point de U .
- Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z_1, z_1) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(z_1, z_1) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(z_1, z_1)\right)^2 = \frac{-\varphi'(z_1)}{z_1^3}$. On rappelle que $\varphi(z_1) = 0$.

On admet le résultat suivant :

Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un pavé ouvert V , et (α, β) un point critique de g alors on a les affirmations suivantes :

- si $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\alpha, \beta) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(\alpha, \beta) - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(\alpha, \beta)\right)^2 > 0$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\alpha, \beta) > 0$ alors g admet un minimum local en (α, β) ;
- si $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\alpha, \beta) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(\alpha, \beta) - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(\alpha, \beta)\right)^2 > 0$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\alpha, \beta) < 0$ alors g admet un maximum local en (α, β) ;
- si $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\alpha, \beta) \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(\alpha, \beta) - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(\alpha, \beta)\right)^2 < 0$ alors g n'admet pas d'extremum local en (α, β) .

- La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_1, z_1) ? Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?
La réponse sera justifiée.
- La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_2, z_2) ? Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?
La réponse sera justifiée.

PROBLÈME 2 : NIVEAU 2

On s'intéresse dans ce problème à quelques aspects mathématiques de la fonction de production d'une entreprise qui produit un certain bien à une époque donnée, à partir de deux facteurs de production travail et capital. **Cette interprétation n'est pas utile pour répondre aux questions suivantes.** Ce sujet a été modifié.

Dans tout le problème :

On suppose que $x > 0$ et $y > 0$. On pose $\mathcal{D} = (\mathbb{R}_+^*)^2$ et pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, $z = \frac{x}{y}$.

Partie I. Fonction de production CES (Constant Elasticity of Substitution).

Dans toute cette partie, on note c un réel vérifiant $0 < c < 1$ et θ un réel vérifiant $\theta < 1$ avec $\theta \neq 0$. Soit f la fonction définie sur $\mathcal{D}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{D}, \quad f(x, y) = (cx^\theta + (1-c)y^\theta)^{\frac{1}{\theta}} \quad (\text{fonction de production CES}).$$

1. *Exemple.* Dans cette question **uniquement**, on prend $\theta = -1$ et $c = \frac{1}{2}$.

a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a : $f(x, y) = \frac{2xy}{x+y}$. Justifier rapidement que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ et calculer pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

b) Soit w et U les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall t > 0$, $w(t) = \frac{2t}{1+t}$ et $U(t) = w(t) - tw'(t)$. Dresser le tableau de variation complet de la fonction U sur $\mathbb{R}_+^*$ (on fera apparaître les limites aux bornes).

c) On rappelle que $z = \frac{x}{y}$. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a $f(x, y) = yw(z)$.

d) Vérifier pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, les relations : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = w'(z)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = U(z)$.

2. **On revient au cas général.**

a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$ et pour tout réel $\lambda > 0$, on a : $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$.

b) Justifier rapidement que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ et, pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

c) Déterminer pour tout $y > 0$ fixé, le signe et la monotonie de la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

De même, déterminer pour tout $x > 0$ fixé, le signe et la monotonie de la fonction $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Soit G la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par $G(x, y) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}$ (taux marginal de substitution technique) et g la fonction

définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall t > 0$, $g(t) = \frac{c}{1-c} t^{-1+\theta}$.

a) Pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, exprimer $G(x, y)$ en fonction de $g(z)$.

b) Pour tout $t > 0$, on pose $s(t) = -\frac{g'(t)}{tg'(t)}$. Calculer $s(t)$ (élasticité de substitution). Conclusion.

4. Soit w la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall t > 0$, $w(t) = f(t, 1)$.

Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a : $f(x, y) = yw(z)$.

Partie II. Caractérisation des fonctions de production à élasticité de substitution constante.

Dans toute cette partie, on note Ψ une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant la condition $\Psi(1, 1) = 1$ et pour tout réel $\lambda > 0$, la relation : $\Psi(\lambda x, \lambda y) = \lambda \Psi(x, y)$.

De plus, on suppose que pour tout $y > 0$ fixé, la fonction $x \mapsto \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y)$ est strictement positive et strictement décroissante et que pour tout $x > 0$ fixé, la fonction $y \mapsto \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y)$ est également strictement positive et strictement décroissante.

5. Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall t > 0, v(t) = \Psi(t, 1)$.

a) Justifier que la fonction v est de classe $\mathcal{C}^2$ et strictement croissante $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que la fonction v' est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire le signe de v'' .

c) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall t > 0, \varphi(t) = v(t) - tv'(t)$. On suppose l'existence de la limite de $\varphi(t)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures et que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = \mu$, avec $\mu \geq 0$.

Déterminer pour tout $t > 0$, le signe de $\varphi(t)$ et montrer que $\mu \leq 1$.

d) Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathcal{D}, \Psi(x, y) = yv(z)$.

6. a) Pour tout $t > 0$, on pose : $h(t) = \frac{v'(t)}{\varphi(t)}$. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a : $\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y)} = h(z)$.

b) Pour tout $t > 0$, on pose : $\sigma(t) = -\frac{h(t)}{th'(t)}$. Déterminer pour tout $t > 0$, le signe de $\sigma(t)$.

7. Les fonctions σ et h sont celles qui ont été définies dans la question 6. On suppose que la fonction σ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$; on note σ_0 cette constante et on suppose $\sigma_0 \neq 1$. On pose : $r = 1 - \frac{1}{\sigma_0}$.

a) Pour tout $t > 0$, on pose $\ell(t) = t^{1-r}h(t)$. Calculer $\ell'(t)$ et en déduire que : $\forall t > 0, h(t) = h(1)t^{r-1}$.

b) Par une méthode analogue à celle de la question a), établir la relation : $\forall t > 0, v(t) = \left(\frac{1 + h(1)t^r}{1 + h(1)} \right)^{\frac{1}{r}}$.

c) En déduire l'existence d'une constante $a \in]0, 1[$ telle que : $\forall (x, y) \in \mathcal{D}, \Psi(x, y) = (ax^r + (1-a)y^r)^{\frac{1}{r}}$.

d) Quelle conclusion peut-on tirer des résultats des questions b) et c) ?