Devoir surveillé n° 3

6 décembre 2024

Durée de l'épreuve : 2h

Le devoir comporte un exercice et deux problèmes indépendants. La calculatrice n'est pas autorisée. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Les résultats seront soulignés ou encadrés.

Exercice (environ 15-20 min)

1. Montrer que, pour tout $(n, i) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{i+k-1}{k} = \binom{n+i}{n}$.

   Indication : on pourra raisonner par récurrence sur n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère les deux polynômes suivant :

$$P = 1 + X + \frac{X(X+1)}{2!} + \ldots + \frac{X(X+1)\ldots(X+n-1)}{n!}$$
$$\text{et} \qquad Q = \frac{(X+n)(X+n-1)(X+n-2)\ldots(X+2)(X+1)}{n!}.$$

2. Déterminer les degrés de P et Q. *La réponse sera soigneusement justifiée.*
3. Calculer $P(0)$ et $Q(0)$.
4. Montrer que, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $P(i) = Q(i)$.
5. En déduire que $P = Q$.

Problème 1 (environ 45 min)

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices de taille 3×3 à coefficients réels.

On note 0_3 la matrice nulle : $0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et I_3 la matrice identité : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On rappelle la convention : pour $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, $\quad M^0 = I_3$.

Soit T l'ensemble des matrices de E qui sont triangulaires supérieures et dont la diagonale est nulle, c'est-à-dire les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels quelconques.

On note aussi U l'ensemble des matrices de la forme $I_3 + M$ avec $M \in T$.

ATTENTION : les deux parties ne sont pas indépendantes. Plusieurs résultats de la partie I seront utilisés dans la partie II. On pourra utiliser les résultats de la partie I même sans avoir réussi à les démontrer.

Partie I : Étude des ensembles T et U

1. Montrer que T est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Préciser une base et la dimension de T.
2. Soit une matrice M appartenant à T, calculer M^2 puis M^3 et donner en général M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que pour deux matrices M et N appartenant à T on a $MN \in T$. *(On dira que T est stable pour le produit des matrices.)*
4. Les matrices appartenant à T sont-elles inversibles ?
5. L'ensemble U est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
6. Les matrices appartenant à U sont-elles inversibles ?

Partie II : Une "exponentielle" et un "logarithme" de matrice

- Exponentielle de matrice : pour $M \in T$, on définit $\exp(M) = I_3 + M + \frac{1}{2}M^2$.
- Logarithme de matrice : pour $A \in U$ de la forme $A = I_3 + M$ avec $M \in T$,
  on définit $\ln(A) = \ln(I_3 + M) = M - \frac{1}{2}M^2$.

7. Après avoir justifié leur existence, calculer $\exp(0_3)$ et $\ln(I_3)$.

Dans toute la suite de l'énoncé, M est une matrice appartenant à T.

8. Montrer, en utilisant les résultats de la partie I, que $M + \frac{1}{2}M^2$ appartient à T et en déduire que $\ln(\exp(M))$ est bien définie et vaut M.
9. De même, montrer que $\exp(\ln(I_3 + M))$ est bien définie et calculer cette matrice en fonction de M.
10. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (\exp(M))^n = \exp(nM)$ (on pourra faire une récurrence).
11. Montrer que $\exp(M)$ est une matrice inversible et que son inverse est $\exp(-M)$.
12. a) Montrer que $I_3 + M$ est une matrice inversible et que $(I_3 + M)^{-1} = I_3 - M + M^2$.
    b) En déduire que $\ln((I_3 + M)^{-1})$ est bien définie et vaut $-\ln(I_3 + M)$.
13. Soient M_1 et M_2 deux matrices appartenant à T, calculer $\exp(M_1 + M_2)$ et $\exp(M_1)\exp(M_2)$, puis simplifier au maximum $\exp(M_1 + M_2) - \exp(M_1)\exp(M_2)$.
14. Donner pour finir un exemple de deux matrices M_1 et M_2 appartenant à T pour lesquelles $\exp(M_1 + M_2) \neq \exp(M_1)\exp(M_2)$.

Problème 2 (environ 1h)

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 2.
On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
On réalise l'expérience aléatoire suivante : on effectue dans l'urne une succession illimitée de tirages avec remise d'une boule en notant les numéros successifs.
Ω désigne l'univers associé à cette expérience.
On considère alors les variables aléatoires suivantes :

— pour tout entier $k \geqslant 1$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée au k-ième tirage ;
— X_n est la variable aléatoire égale au numéro du tirage pour lequel on obtient pour la première fois un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.

Par exemple, si les tirages successifs ont donné les numéros $5, 3, 2, 2, 4, 1, 3 \ldots$, on a alors

- $N_1 = 5$, $N_2 = 3$, $N_3 = 2$, $N_4 = 2$, ...
- $X_n = 4$ car aux deuxième et troisième tirages, le numéro de la boule tirée est strictement inférieur au numéro précédent et au quatrième, il est supérieur ou égal (égal en l'occurrence).

Partie I : Étude du cas $n = 3$

On suppose **dans cette partie uniquement** que $n = 3$.
L'urne contient donc les trois boules numérotées 1, 2 et 3.

1. Exprimer l'événement $(X_3 = 4)$ à l'aide d'événements faisant intervenir les variables aléatoires N_1, N_2, N_3 et en déduire $P(X_3 = 4)$.
2. Montrer que $P(X_3 = 2) = \frac{2}{3}$.
3. Déterminer complètement la loi de X_3.

Partie II : Cas général avec $n \geqslant 2$

On revient maintenant au cas où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

4. Pour tout entier $k \geqslant 1$, donner la loi de N_k ainsi que son espérance.
5. Déterminer $X_n(\Omega)$: ensemble des valeurs prises par X_n et calculer $P(X_n = n + 1)$.
6. Calcul de $P(X_n = 2)$:

a) Que vaut la probabilité conditionnelle $P_{[N_1=1]}(X_n = 2)$?

b) Calculer pour $2 \leqslant i \leqslant n$, $P_{[N_1=i]}(X_n = 2)$ et vérifier que la formule reste valable dans le cas où $i = 1$.

c) En déduire, à l'aide de la formule des probabilités totales, une expression de $P(X_n = 2)$ sous la forme d'une somme, puis simplifier l'expression (on trouvera un résultat simple sous la forme d'une fraction en fonction de n).

7. Soit un entier k tel que $2 \leqslant k \leqslant n$.

   a) Justifier l'égalité entre les événements : $(X_n > k)$ et $(N_1 > N_2 > \cdots > N_k)$.

   b) En déduire que $P(X_n > k) = \dfrac{1}{n^k}\dbinom{n}{k}$.

   (Ce résultat étant fourni, sa justification doit être précise et complète.)

   c) Vérifier que cette formule reste valable pour $k = 0$ et $k = 1$.

8. a) Pour tout entier k tel que $2 \leqslant k \leqslant n+1$, exprimer $P(X_n = k)$ à l'aide de $P(X_n > k-1)$ et de $P(X_n > k)$.

   b) En déduire que $E(X_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X_n > k)$.

   c) Calculer alors $E(X_n)$.

9. Montrer que pour tout entier k tel que $2 \leqslant k \leqslant n+1$, $\quad P(X_n = k) = \dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k}$.

Partie III : Étude d'une "loi limite"

10. Pour $k \geqslant 2$ fixé, montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \frac{k-1}{k!}$

11. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{k-1}{k!}$ est convergente et calculer sa somme.

12. En déduire qu'il existe une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ telle que : $\forall k \geqslant 2, \quad P(Z = k) = \dfrac{k-1}{k!}$.

13. Montrer que Z admet une espérance et calculer $E(Z)$. Comparer $E(Z)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(X_n)$