Correction du devoir surveillé n° 3

Exercice

1. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(n)$: « pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{i+k-1}{k} = \binom{n+i}{n}$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   Pour $n = 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{i+k-1}{k} = 1 + i$ et $\displaystyle\binom{i+1}{1} = i + 1$ donc $\mathscr{P}(1)$ est vérifiée.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vérifiée.
   Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$,
   $$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{i+k-1}{k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{i+k-1}{k} + \binom{i+n+1-1}{n+1} \\ &= \binom{n+i}{n} + \binom{i+n}{n+1} && \text{d'après } \mathscr{P}(n) \\ &= \binom{n+i+1}{n+1}. && \text{formule de Pascal} \end{aligned}$$
   Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.
   Grâce au principe de récurrence, on a montré que $\boxed{\text{pour tout } (n,i) \in (\mathbb{N}^*)^2, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{i+k-1}{k} = \binom{n+i}{n}.}$
2. On peut réécrire P sous la forme : $P = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{X(X+1)\dots(X+k-1)}{k!}$.
   Comme $\deg(X-k+1) = 1$, par règle d'opération sur les degrés, $\deg\left(\dfrac{X(X+1)\dots(X+k-1)}{k!}\right) = k$.
   On a ainsi une somme de polynômes de degrés distincts deux à deux donc on peut affirmer que le degré de cette somme est égal au maximum de tous les degrés.
   En conclusion, $\boxed{\deg(P) = n.}$
   Et d'après la règle pour le degré d'un produit de polynômes, on peut affirmer que $\boxed{\deg(Q) = n.}$
3. Par définition des polynômes P et Q, on a $\boxed{P(0) = 1}$ et $Q(0) = \dfrac{n(n-1)(n-2)\dots \times 2 \times 1}{n!}$ donc $\boxed{Q(0) = 1.}$
4. Par définition de P :
   $$\begin{aligned} P(i) &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{i(i+1)\dots(i+k-1)}{k!} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{i(i+1)\dots(i+k-1)}{k!} \times \frac{1 \times 2 \times \dots \times (i-2)(i-1)}{1 \times 2 \times \dots \times (i-2)(i-1)} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(i+k-1)!}{k!(i-1)!} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{i+k-1}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{i+k-1}{k} \end{aligned}$$
   Donc $P(i) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{i+k-1}{k}$.
   Par définition de Q :

$$\begin{aligned} Q(i) &= \frac{(i+n)(i+n-1)(i+n-2)\dots(i+2)(i+1)}{n!} \\ &= \frac{(i+n)(i+n-1)(i+n-2)\dots(i+2)(i+1)}{n!} \times \frac{i(i-1)\dots 2\times 1}{i(i-1)\dots 2\times 1} \\ &= \frac{(i+n)!}{n!i!} = \binom{n+i}{n}. \end{aligned}$$

Donc $Q(i) = \binom{n+i}{n}$.

D'après la question 1., on a bien $\boxed{P(i) = Q(i).}$

5. On a vu que pour tout $i \in [\![0;n]\!]$, $P(i) = Q(i)$.
   Cela signifie que tous les entiers compris entre 0 et n sont des racines du polynômes $P - Q$.
   Le polynôme $P - Q$ admet dont au moins $n+1$ racines disctincte et d'après la question 2. le polynôme $P - Q$ est de degré inférieur ou égal à n.
   Donc $P - Q$ est le polynôme nul et ainsi $\boxed{P = Q.}$

Problème 1

Partie I : Étude des ensembles T et U

1. On a :

$$\begin{aligned} T &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} / (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

   T est un sous-espace engendré par une famille de matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. D'après notre cours, T est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et par conséquent T est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

   De plus la famille $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice de T.

   Montrons que cette famille est libre. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$a\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3 \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

   Donc la famille $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est libre.

   En conclusion $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de T et $\dim(T) = 3$.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in T$. On calcule alors $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $M^3 = 0_3$.
   Puis pour tout $n > 3$, $M^n = M^3 \times M^{n-3} = 0_3$.
   Ainsi avec $M^0 = I_3$ et $M^1 = M$, on a obtenu M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in T$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in T$.
   On a alors $MN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & af \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est bien une matrice de T.
   Donc T est bien stable par produit.

4. On sait qu'une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si son rang est égal à 3.
   Or les matrices de T ont une colonne nulle donc elles ne sont pas de rang 3.
   Elles ne sont donc pas inversibles.
5. On remarque que la matrice nulle n'appartient pas à U car elle ne peut pas s'écrire sous la forme $I_3 + M$ avec $M \in T$.
   Donc U n'est pas un espace vectoriel.
6. Les matrice de U sont de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ce sont des matrice triangulaires sans 0 sur la diagonale donc elle sont inversibles.

Partie II : Une "exponentielle" et un "logarithme" de matrice.

7. La matrice 0_3 est bien dans T donc $\exp(0_3)$ est bien défini, et par définition :
$$\exp(0_3) = I_3 + 0_3 + \frac{1}{2}0_3^2 = I_3.$$
   Comme on a $I_3 = I_3 + 0_3$ avec $0_3 \in T$, $\ln(I_3)$ est bien défini et $\ln(I_3) = \ln(I_3 + 0_3) = 0_3 - \frac{1}{2}0_3^2 = 0_3$.
8. Soit $M \in T$, comme T est stable par produit, $M^2 \in T$ et comme T est un espace vectoriel on peut en déduire que $M + \frac{1}{2}M^2 \in T$. (Autre méthode : on peut aussi expliciter les coefficients de cette matrice et constater qu'elle appartient à T).
   Ainsi $\exp(M)$ s'écrit bien sous la forme I_3+ une matrice de T, donc on peut bien calculer $\ln(\exp(M))$.
   D'après la définition donnée pour ln d'une matrice on a donc :
$$\begin{aligned}
\ln(\exp(M)) &= \ln\left(I_3 + \underbrace{M + \frac{1}{2}M^2}_{\in T}\right) \\
&= \left(M + \frac{1}{2}M^2\right) - \frac{1}{2}\left(M + \frac{1}{2}M^2\right)^2 \\
&= M + \frac{1}{2}M^2 - \frac{1}{2}\left(M^2 + M^3 + \frac{1}{4}M^4\right) \qquad \text{car } M \text{ et } \frac{1}{2}M^2 \text{commutent} \\
&= M \qquad \text{car } \forall n \geqslant 3,\ M^n = 0_3.
\end{aligned}$$
9. Par définition $\ln(I_3 + M) = M - \frac{1}{2}M^2$. Comme T est stable par produit et que c'est un espace vectoriel on a $M - \frac{1}{2}M^2 \in T$.
   On peut donc bien calculer $\exp(\ln(I_3 + M))$ et on a :
$$\exp(\ln(I_3 + M)) = I_3 + \left(M - \frac{1}{2}M^2\right) + \frac{1}{2}\left(M - \frac{1}{2}M^2\right)^2 = I_3 + M,$$
   en utilisant encore une fois le fait que pour tout $n \geqslant 3$, $M^n = 0_3$.
10. Démontrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(n)$: $\exp(M)^n = \exp(nM)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
    - Pour $n = 0$: D'une part $\exp(M)^0 = I_3$ par convention. D'autre par $\exp(0M) = \exp(0_3) = I_3$ d'après la question 1.
      Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
    - Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Alors
$$\begin{aligned}
\exp(M)^{n+1} &= \exp(M)^n \times \exp(M) = \exp(nM) \times \exp(M) \\
&= \left(I_3 + nM + \frac{1}{2}n^2M^2\right) \times \left(I_3 + M + \frac{1}{2}M^2\right) \\
&= I_3 + (n+1)M + nM^2 + \frac{n^2}{2}M^2 + \frac{1}{2}M^2 \qquad \text{car } \forall n \geqslant 3,\ M^n = 0_3 \\
&= I_3 + (n+1)M + \frac{n^2+2n+1}{2}M^2 = I_3 + (n+1)M + \frac{1}{2}\left((n+1)M\right)^2 \\
&= \exp((n+1)M)
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.

Grâce au principe de récurrence on a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp(M)^n = \exp(nM)$.

11. On a :
$$\begin{aligned}
\exp(M) \times \exp(-M) &= \left(I_3 + M + \frac{1}{2}M^2\right) \times \left(I_3 - M + \frac{1}{2}(-M)^2\right) \\
&= I_3 - M + \frac{1}{2}M^2 + M - M^2 + \frac{1}{2}M^2 \qquad \text{car } \forall n \geqslant 3,\ M^n = 0_3 \\
&= I_3
\end{aligned}$$

Donc $\exp(M)$ est inversible et son inverse est $\exp(-M)$.

12. On a :
$$(I_3 + M) \times (I_3 - M + M^2) = I_3 - M + M^2 + M - M^2 + M^3 = I_3 \qquad \text{car } M^3 = 0_3$$

Donc $I_3 + M$ est inversible et $(I_3 + M)^{-1} = I_3 - M + M^2$.
Comme T est stable par produit et est un espace vectoriel on a $-M + M^2 \in T$. On peut donc bien calculer $\ln(I_3 - M + M^2)$ ce qui signifie que $\ln((I_3 + M)^{-1})$ est bien définie.
De plus :
$$\ln((I_3 + M)^{-1}) = \ln(I_3 - M + M^2) = -M + M^2 - \frac{1}{2}\left(-M + M^2\right)^2 = -M + \frac{1}{2}M^2,$$

en utilisant encore que $\forall n \geqslant 3,\ M^n = 0_3$.
On a donc bien $\ln((I_3 + M)^{-1}) = -\ln(I_3 + M)$.

13. Soient M_1 et M_2 deux matrices de T. On a :
$$\begin{aligned}
\exp(M_1 + M_2) &= I_3 + (M_1 + M_2) + \frac{1}{2}(M_1 + M_2)^2 \\
&= I_3 + M_1 + M_2 + \frac{1}{2}M_1^2 + \frac{1}{2}M_1M_2 + \frac{1}{2}M_2M_1 + \frac{1}{2}M_2^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\exp(M_1)\exp(M_2) &= \left(I_3 + M_1 + \frac{1}{2}M_1^2\right)\left(I_3 + M_2 + \frac{1}{2}M_2^2\right) \\
&= I_3 + M_2 + \frac{1}{2}M_2^2 + M_1 + M_1M_2 + \frac{1}{2}M_1M_2^2 + \frac{1}{2}M_1^2 + \frac{1}{2}M_1^2M_2 + \frac{1}{4}M_1^2M_2^2
\end{aligned}$$

On peut alors remarquer que si $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors :

$$\begin{aligned}
M_1M_2^2 &= \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & df \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3 \\
M_1^2M_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3 \\
M_1^2M_2^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & df \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3
\end{aligned}$$

Donc $\exp(M_1)\exp(M_2) = I_3 + M_2 + \frac{1}{2}M_2^2 + M_1 + M_1M_2 + \frac{1}{2}M_1^2$.

On obtient alors : $\exp(M_1 + M_2) - \exp(M_1)\exp(M_2) = -\frac{1}{2}M_1M_2 + \frac{1}{2}M_2M_1$.

Il suffit de trouver deux matrice qui ne commutent pas.

On pose $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a alors $\exp(M_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\exp(M_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc $\exp(M_1)\exp(M_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. De plus $\exp(M_1 + M_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc $\exp(M_1)\exp(M_2) \neq \exp(M_1 + M_2)$.

Problème 2

Partie I : Étude du cas $n = 3$

1. L'événement $(X_3 = 4)$ est réalisé si au cours des tirages 1, 2 et 3 les numéros obtenus forment un triplet strictement décroissant et si lors du quatrième tirage le numéro obtenu est supérieur ou égal au numéro obtenu au troisième tirage. Or les numéros possibles sont $1, 2, 3$. L'événement $(X_3 = 4)$ est donc réalisé si on obtient 3 au premier tirage, 2 au deuxième, 1 au troisième et n'importe quel numéro au quatrième. D'où

$$(X_3 = 4) = (N_1 = 3) \cap (N_2 = 2) \cap (N_3 = 1).$$

Les résultats des tirages étant indépendants, on a donc

$$P(X_3 = 4) = P((N_1 = 3) \cap (N_2 = 2) \cap (N_3 = 1)) = P(N_1 = 3)P(N_2 = 2)P(N_3 = 1) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

2. L'événement $(X_3 = 2)$ est réalisé si le numéro obtenu au deuxième tirage est supérieur ou égal au numéro obtenu au premier tirage, d'où

$$(X_3 = 2) = (N_1 = 1) \cup [(N_1 = 2) \cap (N_2 \in \{2, 3\})] \cup [(N_1 = 3) \cap (N_2 = 3)]$$

Les unions sont des unions d'événements incompatibles et les résultats des tirages sont indépendants, on a donc

$$\begin{aligned} P(X_3 = 2) &= P(N_1 = 1) + P\left((N_1 = 2) \cap (N_2 \in \{2, 3\})\right) + P\left((N_1 = 3) \cap (N_2 = 3)\right) \\ &= P(N_1 = 1) + P(N_1 = 2)P(N_2 \in \{2, 3\}) + P(N_1 = 3)P(N_2 = 3) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

3. Pour que l'événement $(X_3 = k)$ soit réalisé il faut que les numéros obtenus aux tirages $1, \dots, k-1$ forment une suite strictement décroissante (et donc soient tous différents). Il y a trois numéros différents dans l'urne, donc au maximum $k - 1 = 3$ i.e. $k = 4$. On a aussi bien sûr $X_3 \geqslant 2$.
On a donc $X_3(\Omega) = \{2, 3, 4\}$. On a déjà calculé $P(X_3 = 4)$ et $P(X_3 = 2)$, on en déduit :
$P(X_3 = 3) = 1 - P(X_3 = 4) - P(X_3 = 2)$, on a donc

$$P(X_3 = 2) = \frac{2}{3}, \qquad P(X_3 = 3) = \frac{8}{27}, \qquad P(X_3 = 4) = \frac{1}{27}.$$

Partie II : Cas général avec $n \geqslant 2$

4. Pour tout entier $k \geqslant 1$, la variable aléatoire N_k suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Son espérance vaut donc $E(N_k) = \frac{1+n}{2}$.

5. Par le même raisonnement qu'en I.3. :
   On a aussi bien sûr $X_n \geqslant 2$.
   D'autre part, pour que l'événement $(X_n = k)$ soit réalisé il faut que les numéros obtenus aux tirages $1, \ldots, k-1$ forment une suite strictement décroissante. On peut obtenir n numéros différents, donc au maximum $k-1 = n$ i.e. $k = n+1$.
   Réciproquement les événements $(X_n = k)$ pour $2 \leqslant k \leqslant n+1$ sont bien des événements possibles.
   D'où $X(\Omega) = [\![2, n+1]\!]$.
   De plus $(X_n = n+1) = (N_1 = n) \cap (N_2 = n-1) \cap \cdots \cap (N_n = 1)$ et comme les tirages sont avec remise, les variables aléatoires $N_1, N_2, \ldots, N_n$ sont mutuellement indépendantes, on a donc :
$$P(X_n = n+1) = P(N_1 = n)P(N_2 = n-1)\ldots P(N_n = 1) = \left(\frac{1}{n}\right)^n.$$

6. Calcul de $P(X_n = 2)$:
   a) Si on obtient 1 au premier tirage alors quel que soit le numéro obtenu au second tirage il sera supérieur ou égal à 1, et donc $P_{[N_1=1]}(X_n = 2) = 1$.
   b) Soit $2 \leqslant i \leqslant n$, sachant $N_1 = i$, l'événement $X_n = 2$ signifie que la deuxième boule tirée a un numéro $\geqslant i$, donc
$$P_{[N_1=i]}(X_n = 2) = P(N_2 \in \{i, i+1, \ldots, n\}) = \frac{n-i+1}{n}.$$
   Pour $i = 1$ on a $P_{[N_1=1]}(X_n = 2) = 1 = \frac{n}{n}$ la formule reste valable dans le cas où $i = 1$.
   c) Par la formule des probabilités totales, avec le système complet $([N_1 = i])_{1 \leqslant i \leqslant n}$, on a donc
$$\begin{aligned}
P(X_n = 2) &= \sum_{i=1}^{n} P_{[N_1=i]}(X_n = 2)P(N_1 = i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i+1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(n-i+1) \\
&= \frac{1}{n^2}\left(n + (n-1) + \cdots + 1\right) \\
&= \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} \text{ (somme des } n \text{ premiers entiers)} \\
&= \frac{n+1}{2n} \text{ (on contrôle que pour } n = 3 \text{ on retrouve bien } \frac{2}{3})
\end{aligned}$$

7. Soit $k \in [\![2, n]\!]$. L'événement $(X_n > k)$ est réalisé si, et seulement si, jusqu'au $k$ième tirage les numéros obtenus forment un $k$uplet strictement décroissant c'est-à-dire si et seulement si
   $(N_1 > N_2 > \cdots > N_k)$, d'où l'égalité des événements.
   On raisonne par dénombrement. Considérons l'univers correspondant aux résultats des k premiers tirages. Il est constitué des k-listes (ou k-uplets) de nombres entiers compris entre 1 et n. Les tirages étant indépendants les résultats sont équiprobables. Le cardinal de l'univers est n^k.
   On calcule maintenant le cardinal de l'événement : $(N_1 > N_2 > \cdots > N_k)$. C'est le nombre de k-uplets strictement décroissant, soit $\binom{n}{k}$ car à chaque choix de k éléments distincts dans $[\![1, n]\!]$ il correspond exactement un k-uplet strictement décroissant (un seul rangement possible).
   On a donc
$$P(X_n > k) = \frac{\operatorname{card}(N_1 > N_2 > \cdots > N_k)}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{\binom{n}{k}}{n^k} = \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}.$$
   De plus, on a bien $\frac{\binom{n}{0}}{n^0} = \frac{1}{1} = 1 = P(X_n > 0)$ et $\frac{\binom{n}{1}}{n^1} = \frac{n}{n} = 1 = P(X_n > 1)$ (ce sont bien deux événements certains).

8. Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$, $(X_n > k-1) = (X_n > k) \cup (X_n = k)$ et l'union est disjointe, donc
$$P(X_n = k) = P(X_n > k-1) - P(X_n > k).$$

9. $X_n(\Omega)$ est fini, la variable aléatoire X_n admet donc une espérance et

$$\begin{aligned}
E(X_n) &= \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n = k) = \sum_{k=2}^{n+1} k(P(X_n > k-1) - P(X_n > k)) \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n > k-1) - \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n > k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (k+1)P(X_n > k) - \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n > k) \\
&\quad \text{(par changement d'indice dans la première somme)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} kP(X_n > k) - \sum_{k=2}^{n+1} kP(X_n > k) + \sum_{k=1}^{n} P(X_n > k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X_n) &= P(X_n > 1) - (n+1)P(X_n > n+1) + \sum_{k=1}^{n} P(X_n > k) \quad \text{par somme télescopique} \\
&= 1 + 0 + \sum_{k=1}^{n} P(X_n > k) = \sum_{k=0}^{n} P(X_n > k) \quad \text{car } P(X_n > 0) = 1.
\end{aligned}$$

D'où par la question 4. et par la formule du binôme de Newton,

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

10. Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$.

$$\begin{aligned}
P(X_n = k) &= P(X_n > k-1) - P(X_n > k) \quad \text{par la question 5} \\
&= \frac{\binom{n}{k-1}}{n^{k-1}} - \frac{\binom{n}{k}}{n^k} \quad \text{par la question 4} \\
&= \frac{1}{n^k}\left[\frac{n.n!}{(k-1)!(n-k+1)!} - \frac{n!}{k!(n-k)!}\right] \\
&= \frac{n!}{n^k k!(n-k+1)!}\left[(nk) - (n-k-1)\right] \\
&= \frac{n!}{n^k k!(n-k+1)!}\left[nk - n + k - 1\right] \\
&= \frac{n!}{n^k k!(n-k+1)!}(n+1)(k-1) \\
&= \frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

Partie III : Étude d'une "loi limite"

11. Soit $k \geqslant 2$. On a

$$P(X_n = k) = \frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k} = \frac{k-1}{n^k}\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$$

On simplifie : $\dfrac{(n+1)!}{(n+1-k)!} = (n+1)(n)(n-1)...(n+2-k)$ et chaque terme du produit est équivalent à n lorsque n tend vers $+\infty$. Comme il y a k termes (car il y a $n+1$ termes dans $(n+1)!$ et $n+1-k$ termes dans $(n+1-k)!$) on obtient $\dfrac{(n+1)!}{(n+1-k)!} \sim n^k$ (produit d'équivalent). D'où

$$\lim_{n \to +\infty} P(X_n = k) = \frac{k-1}{k!}$$

12. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geqslant 2$, on considère la somme partielle d'ordre N :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{N} \frac{k-1}{k!} &= \sum_{k=2}^{N} \frac{k}{k!} - \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k!} = \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k!} \quad \text{(par changement d'indice dans la première somme)} \\
&= 1 - \frac{1}{N!} \quad \text{(par somme télescopique)} \\
&\underset{N \to +\infty}{\to} 1
\end{aligned}$$

Donc la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 2} \frac{k-1}{k!}$ converge et $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} = 1$.

13. La série précédente est à termes positifs ($\dfrac{k-1}{k!} > 0$ pour $k \geqslant 2$) et est convergente de somme 1. D'où l'existence de Z à valeurs dans $\mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$ telle que : $\forall k \geqslant 2, \quad P(Z = k) = \dfrac{k-1}{k!}$

14. Étudions l'absolue convergence de la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 2} kP(Z = k)$ i.e. de la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 2} k\frac{k-1}{k!}$.
C'est une série à termes positifs, cela revient donc à étudier sa convergence.
Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geqslant 2$,

$$\sum_{k=2}^{N} \frac{k(k-1)}{k!} = \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{(k-2)!} = \sum_{k=0}^{N-2} \frac{1}{k!} \underset{N \to +\infty}{\to} e$$

(car on reconnait la somme partielle d'ordre $N - 2$ de la série exponentielle de 1).
La série considérée est donc absolument convergente, donc Z admet une espérance et $E(Z) = e$.

On a montré à la question II6) que $E(X_n) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.
Or $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right)$ et $n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} n.\dfrac{1}{n} = 1 \underset{n \to +\infty}{\to} 1$ donc par continuité de la fonction exp,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\to} e$$

et donc

$$\lim_{n \to +\infty} E(X_n) = E(Z)$$