DM 10

BCPST Spé

à rendre le lundi 06 janvier 2025

Consignes :

- *Les deux sujets sont adaptés d'épreuves orales de la banques Agro-Véto.*
- *Vous devez choisir un sujet et le traiter.*
- *De préférence choisissez le thème que vous avez le moins réussi lors du dernier DS.*
- *Nous vous conseillons de traiter la question d'informatique sur ordinateur avant de recopier, ou d'imprimer le programme, cela vous entraînera à l'épreuve telle qu'elle se déroule.*
- *Vous **pouvez** traiter le deuxième sujet, mais seulement si le sujet choisi en premier a été traité correctement. **Picorage interdit!***

Sujet 1 : Algèbre et probabilités

Question de cours Si α est un réel quelconque, déterminer sur $]0;+\infty[$ l'expression d'une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$.

Exercice On considère d'une part deux urnes A et B et d'autre part 3 boules numérotées de 1 à 3 .

On répartit initialement les boules entre les deux urnes, puis on effectue une série illimitée d'étapes selon le protocole suivant : à chaque étape, on tire au hasard un nombre entre 1 et 3 et on transfère la boule portant le numéro correspondant dans l'urne où elle n'était pas.

On note X_0 la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes initialement dans l'urne A et pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne A après n étapes.

On suppose que X_0 suit la loi uniforme sur $[\![0,3]\!]$.

1. Écrire une fonction Python qui prend en argument une valeur de n, simule la réalisation de la variable aléatoire X_n et renvoie la valeur de X_n obtenue.
2. Soient $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n = \begin{pmatrix} P(X_n=0) \\ P(X_n=1) \\ P(X_n=2) \\ P(X_n=3) \end{pmatrix}$.

   Déterminer U_0 et démontrer que pour tout entier naturel $n, U_{n+1} = MU_n$.
3. Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de dégré inférieur ou égal à 3 et $\mathscr{B} = \left(1, X, X^2, X^3\right)$ la base canonique de E.

Soit φ l'application définie sur E par :

$$\forall P \in E, \quad \varphi(P) = XP(X) + \frac{1}{3}\left(1-X^2\right)P'(X)$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E, justifier que sa matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice M.
2. Pour tout $k \in [\![0,3]\!]$, on pose : $P_k = \frac{1}{8}(X-1)^k(X+1)^{3-k}$.
   (a) Démontrer que pour $k \in [\![0,3]\!], \varphi(P_k) = \left(1-\frac{2}{3}k\right)P_k$.
   (b) Montrez que $\mathscr{B}' = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ forment une base de E.
   Indication : on pourra s'intéresser à la matrice de la famille $(P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$ *dans la base* $\mathscr{B}$.
   (c) Donner la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}'$.
3. On pose : $Q = \frac{1}{4}\left(X^3+X^2+X+1\right)$.
   (a) Expliciter les coordonnées de Q dans la base $\mathscr{B}$. Quel vecteur retrouve-t-on?
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi^n(Q) = P_0 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n P_2$.*Indication on pourra raisonner par récurrence et utiliser 2a*
4. À l'aide des questions précédentes, calculer les limites $\lim_{n\to+\infty} P(X_n=0)$, $\lim_{n\to+\infty} P(X_n=1)$, $\lim_{n\to+\infty} P(X_n=2)$ et $\lim_{n\to+\infty} P(X_n=3)$. Par quelle loi pourrait-on approcher la loi de X_n pour une grande valeur de n?
5. Vérifier le résultat de la question précédente à l'aide d'une simulation informatique.

Sujet 2 : Probabilités

Question de cours Énoncer le théorème de d'Alembert–Gauss.

Exercice Un joueur dispose de N dés équilibrés à 6 faces. Il lance une première fois ceux-ci et on note X_1 le nombre de 6 obtenus. Il met de côté les dés correspondants et relance les autres dés (s'il en reste). On note X_2 le nombre de 6 obtenus et on répète l'expérience définissant ainsi une suite de variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots$. S'il ne reste plus de dés au m-ème lancer, on a alors, pour tout $k \geqslant m, X_k = 0$.

Pour tout entier naturel non nul n, on définit la variable $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, qui correspond alors au nombre de 6 obtenus après n lancers.

1. Écrire une fonction Python X(N) qui prend en argument le nombre de dés N et renvoie la valeur de X_1.
2. En déduire une fonction Python S(N, n) qui prend en arguments les nombre de dés N et n le nombre de lancers effectués et renvoie la valeur de S_n.

3. On se propose de montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que S_n suit une loi binomiale de paramètres N et p_n et on cherchera à déterminer p_n.

   (a) Question préliminaire : Soient N, M et $k \in \mathbb{N}$ avec $M \leqslant k \leqslant N$. Montrer que :

   $$\binom{N}{M}\binom{N-M}{k-M} = \binom{N}{k}\binom{k}{M}$$

   (b) Montrer que la proposition est vérifiée pour $n = 1$ et déterminer p_1.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que S_n suit une loi binomiale de paramètre N et p_n.

      i. Soient M et k deux entiers naturels tels que $M \leqslant k \leqslant N$. Déterminer $P_{S_n = M}(X_{n+1} = k - M)$.

      ii. En déduire que S_{n+1} suit une loi binomiale de paramètres N et p_{n+1} où $p_{n+1} = \frac{1+5p_n}{6}$.

   (d) Déterminer une expression explicite de p_n.

4. On admet qu'il est presque-sûr qu'on obtienne tous les 6 au bout d'un nombre fini de lancers, c'est-à-dire qu'il existe presque sûrement un rang $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $S_n = N$.

   On note T le nombre de lancers nécessaires pour n'avoir que des 6 (et on pose par convention $T = +\infty$ si on n'obtient jamais tous les 6 , ce qui a une probabilité nulle d'arriver), c'est-à -dire

   $$T = \min\left(\{n \geqslant 1 \mid S_n = N\} \cup \{+\infty\}\right).$$

   Déterminer la fonction de répartition de T.

5. Vérifier que la variable T admet une espérance et donner une formule exprimant celle-ci.

   Indication On admettra le résultat suivant : T admet une espérance si la série $\sum P(T > n)$ est convergente et dans ce cas $E(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(T > n)$.

6. **Facultatif et dur** Démontrer le résultat donné dans l'indication précédente.