DM 09

BCPST Spé

à rendre le lundi 16 décembre

Pour toute matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$E_A = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = X\} \qquad \text{et} \qquad F_A = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \ / \ AX = 0\}.$$

$\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ désigne les matrices colonnes à n lignes.
On admet que Dim $(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})) = n$.

1. On suppose dans cette question que $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   On pose $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que $(F_A, +, \cdot)$ est un espace vectoriel et que (U) en est une base. (Résoudre $AX = 0$)

   (b) Montrer que $(E_A, +, \cdot)$ est un espace vectoriel et en déterminer une base.

   (c) Montrer que (V, W) est une base de E_A.

   (d) i. Soient x, y et z trois réels. Montrer que $xU + yV + zW = 0 \Rightarrow yV + zW = 0$.
   Indication : multiplier la relation de départ par A.

   ii. En déduire que la famille $\mathscr{B} = (U, V, W)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   (e) On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

   (f) Vérifier que $A = PDP^{-1}$ et en déduire que $A^2 = A$.

Facultatif

2. On suppose à présent que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et que $A = A^2$.

   (a) Montrer que $(E_A, +, \cdot)$ et $(F_A, +, \cdot)$ sont des espaces vectoriels.

   (b) Soit $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $V \in E_A$ et $W \in F_A$. Montrer que si $U = V + W$ alors $V = AU$ puis $W = (I - A)U$.

   (c) Réciproquement, montrer que pour tout $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $AU \in E_A$ et $(I - A)U \in F_A$.

   (d) En déduire que pour tout U de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe un unique $V \in E_A$ et un unique $W \in F_A$ tel que $U = V + W$. (Penser à se servir des deux questions précédentes)

3. On se place dans les mêmes conditions que le 2., on note p la dimension de E_A et q celle de F_A.
   Soient $(V_1, \cdots, V_p)$ une base de E_A et $(W_1, \cdots, W_q)$ une base de F_A.

   (a) Montrer que $(V_1, \cdots, V_p, W_1, \cdots, W_q)$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

   (b) En déduire que Dim E_A + Dim $F_A = n$.