Problème 1

Partie A : Étude d'une fonction d'une variable

1. On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ et, comme $a > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^{2a} = 0$. Par somme, $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = -\infty$.

De plus, pour tout $x > 0$, $\varphi(x) = x^{2a} \left(\frac{\ln(x)}{x^{2a}} - a \right)$.

D'après la règle des croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^{2a}} - a = -a$. Et, comme $a > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2a} = +\infty$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\infty$.

2. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ par somme de fonction usuelles dérivables. Pour tout $x > 0$:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 2a^2 x^{2a-1} = \frac{1 - 2a^2 x^{2a}}{x}.$$

$\varphi'(x)$ est donc du signe de $1 - 2a^2 x^{2a}$ (car $x > 0$) donc nous avons le tableau suivant :

x	0	x_0	$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	$-$
φ		$\varphi(x_0)$	
	$-\infty$		$-\infty$

avec $\varphi(x_0) = -\frac{1}{2a} \ln(2a^2) - \frac{1}{2a} = -\frac{\ln(2a^2) + 1}{2a}$.

3. Si $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$, $1 + \ln(2a^2) < 0$ donc $\varphi(x_0) > 0$.

La fonction φ est continue et strictement croissante sur $]0; x_0]$ donc, d'après le théorème de bijection monotone, φ réalise une bijection de $]0; x_0]$ sur $] -\infty; \varphi(x_0)]$.

Or $0 \in] -\infty; \varphi(x_0)]$ (car $\varphi(x_0) > 0$) donc 0 admet un unique antécédent par φ dans $]0; x_0]$ ce qui signifie que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0; x_0]$ que nous noterons z_1 .

De même on montre que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution sur $]x_0; +\infty[$ que l'on note z_2 .

Or $\varphi(x_0) \neq 0$ donc $z_1 \neq x_0$.

En conclusion, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet bien uniquement 2 solutions qui vérifient $z_1 < x_0 < z_2$.

Si $a > \sqrt{\frac{1}{2e}}$, $\varphi(x_0) < 0$ donc $\forall x > 0$, $\varphi(x) < 0$ et donc l'équation $\varphi(x) = 0$ n'admet pas de solutions.

Si $a = \sqrt{\frac{1}{2e}}$, $\varphi(x_0) = 0$ et pour $x \neq x_0$, $\varphi(x) < 0$ donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution, le réel x_0 .

Partie B : Une fonction de deux variables

4. La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et la fonction $(x, y) \mapsto (xy)^a$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U .

Donc, par produit et somme, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U .

5. Pour tout $(x, y) \in U$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\ln(y)}{x} - ax^{a-1}y^a \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\ln(x)}{y} - ax^a y^{a-1}.$$

6. Par définition de la notion de point critique on a :

$$\begin{aligned}
 (x, y) \text{ est un point critique de } f &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\ln(y)}{y} - ax^{a-1}y^a = 0 \\ \frac{\ln(x)}{x} - ay^ay^{a-1} = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\ln(y)}{y} - ax^{a-1}y^a = 0 \\ \ln(x) - \ln(y) = 0 \quad L_2 \leftarrow yL_2 - xL_1 \quad (\text{car } y \neq 0) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x} - ax^{2a-1} = 0 \\ x = y \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) = 0 \quad \text{car } x \neq 0 \\ x = y. \end{cases}
 \end{aligned}$$

7. a) f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le pavé ouvert U donc, d'après notre cours, on sait que les seuls points où f est susceptible d'admettre un extremum sont les points critiques.

D'après la question précédente et la question 3., dans le cas où $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$, f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2) .

En conclusion les seuls points où f est susceptible d'admettre un extremum sont (z_1, z_1) et (z_2, z_2) .

b) Si $a > \sqrt{\frac{1}{2e}}$, f n'admet pas de point critique donc n'admet pas d'extremum.

Si $a = \sqrt{\frac{1}{2e}}$, f admet un unique point critique (x_0, x_0) , c'est le seul point où f est susceptible d'admettre un extremum.

Partie C : Extremum locaux de f

8. f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur le pavé ouvert U , d'après le théorème de Schwarz, les dérivées "croisées" sont égales. Pour tout $(x, y) \in U$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= -\frac{\ln(y)}{x^2} - a(a-1)x^{a-2}y^a, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= -\frac{\ln(x)}{y^2} - a(a-1)x^ay^{a-2}, \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{1}{xy} - a^2(xy)^{a-1}.
 \end{aligned}$$

9. D'après la définition de z_1 on a $\varphi(z_1) = 0$ donc $\ln(z_1) = az_1^{2a}$. Ainsi, d'après la question précédente :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z_1, z_1) = -\frac{az_1^{2a}}{z_1^2} - a(a-1)z_1^{2a-2} = -\frac{az_1^{2a} + a(a-1)z_1^{2a}}{z_1^2} = -az_1^{2a-2}.$$

Par symétrie des rôles de x et y , on a immédiatement $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(z_1, z_1) = -az_1^{2a-2}$.

Et enfin, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(z_1, z_1) = \frac{1}{z_1^2} - a^2z_1^{2a-2}$.

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z_1, z_1) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(z_1, z_1) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(z_1, z_1) \right)^2 &= (-az_1^{2a-2})^2 - \left(\frac{1}{z_1^2} - a^2z_1^{2a-2} \right)^2 \\
 &= \left[az_1^{2a-2} - \left(\frac{1}{z_1^2} - a^2z_1^{2a-2} \right) \right] \times \left[az_1^{2a-2} + \frac{1}{z_1^2} - a^2z_1^{2a-2} \right] \\
 &= \frac{2az_1^{2a} - 1}{z_1^2} \times \frac{1}{z_1^2} = -\frac{\varphi'(z_1)}{z_1^3}.
 \end{aligned}$$

10. f étant une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un pavé ouvert, on peut utiliser le résultat admis.

On sait que $z_1 \in]0; x_0[$ et que φ est strictement croissante sur $]0; x_0[$.

Donc $\varphi'(z_1) > 0$ et $z_1^3 > 0$, ainsi $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z_1, z_1) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(z_1, z_1) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(z_1, z_1) \right)^2 < 0$.

Donc f n'admet pas d'extremum local en (z_1, z_1) .

11. z_1 et z_2 vérifient la même relation $\varphi(z_i) = 0$. On a donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z_2, z_2) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(z_2, z_2) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(z_2, z_2) \right)^2 = -\frac{\varphi'(z_2)}{z_2^3}.$$

Par le même raisonnement que dans la question précédente, on peut justifier que $\varphi'(z_2) < 0$ (φ est strictement décroissante sur $]x_0; +\infty[$) et $z_2^3 > 0$. Donc $-\frac{\varphi'(z_2)}{z_2^3} > 0$

Donc, d'après le résultat admis, f admet un extremum local en (z_2, z_2) .

De plus, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z_2, z_2) = -az_2^{2a-2} < 0$, car $a > 0$ et $z_2 > 0$, donc f admet en (z_2, z_2) un maximum local.

Problème 2

Partie I. Fonction de production CES (Constant Elasticity of Substitution).

1. a) Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (cx^\theta + (1-c)y^\theta)^{\frac{1}{\theta}} \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{x+y}{2xy} \right)^{-1} \end{aligned}$$

Pour $(x, y) \in \mathcal{D}$, $f(x, y) = \frac{2xy}{x+y}$

Comme pour $(x, y) \in \mathcal{D}$, $x+y > 0$ la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ dont le dénominateur est non nul.

f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$.

Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2 \frac{y(x+y) - xy \times 1}{(x+y)^2} \\ &= \frac{2y^2}{(x+y)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2 \frac{x(x+y) - xy \times 1}{(x+y)^2} \\ &= \frac{2x^2}{(x+y)^2} \end{aligned}$$

Pour $(x, y) \in \mathcal{D}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2y^2}{(x+y)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2x^2}{(x+y)^2}$

b) La fonction w est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient défini de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ donc w' est de classe $\mathcal{C}^2$. U est de classe $\mathcal{C}^2$ comme somme et produit de fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
 U(t) &= w(t) - tw'(t) \\
 &= \frac{2t}{1+t} - t \frac{2t(1+t) - 2t}{(1+t)^2} \\
 &= \frac{2t}{1+t} - t \frac{2}{(1+t)^2} \\
 &= \frac{2t}{1+t} \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) \\
 &= \frac{2t}{1+t} \cdot \frac{t}{1+t} \\
 &= 2 \frac{t^2}{(1+t)^2}
 \end{aligned}$$

La limite en 0 n'est pas une forme indéterminée. Pour calculer la limite en $+\infty$, on écrit pour $t \in \mathbb{R}_+^*$

$$U(t) = 2 \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{t}\right)^2} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} U(t) = 2$$

En dérivant, pour $t \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned}
 U'(t) &= 2 \frac{2t(1+t)^2 - t^2 \times 2(1+t)}{(1+t)^4} \\
 &= 2 \frac{2t(1+t)((1+t) - t)}{(1+t)^4} \\
 &= 4 \frac{t}{(1+t)^3}
 \end{aligned}$$

Cette quantité est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	0	$+\infty$
$U'(x)$	+	
U	0	2

c) Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \frac{2xy}{x+y} \\
 &= \frac{2x}{\frac{x}{y} + 1} && \text{car } y \neq 0 \\
 &= \frac{2zy}{z+1} \\
 &= yw(z)
 \end{aligned}$$

Pour $(x, y) \in \mathcal{D}$, $f(x, y) = yw(z)$.

d) Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{2y^2}{(x+y)^2} \\ &= \frac{2}{\left(\frac{x+y}{y}\right)^2} && \text{car } y \neq 0 \\ &= \frac{2}{(1+z)^2} \\ &= w'(z) && \text{calcul de } w' \text{ dans la question précédente} \end{aligned}$$

et

$$U(t) = 2 \frac{t^2}{(1+t)^2}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{2x^2}{(x+y)^2} \\ &= \frac{2\left(\frac{x}{y}\right)^2}{\left(\frac{x}{y} + 1\right)^2} \\ &= \frac{2(z)^2}{(1+z)^2} \end{aligned}$$

pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = w'(z)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = U(z)$.

2. a) Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$ et un réel $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (c(\lambda x)^\theta + (1-c)(\lambda y)^\theta)^{\frac{1}{\theta}} && \text{définition de CES} \\ &= (c\lambda^\theta x^\theta + (1-c)\lambda^\theta y^\theta)^{\frac{1}{\theta}} \\ &= [\lambda^\theta (cx^\theta + (1-c)y^\theta)]^{\frac{1}{\theta}} && \text{factorisation} \\ &= [\lambda^\theta]^{\frac{1}{\theta}} (cx^\theta + (1-c)y^\theta)^{\frac{1}{\theta}} \\ &= \lambda (cx^\theta + (1-c)y^\theta)^{\frac{1}{\theta}} \end{aligned}$$

Pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$ et pour tout réel $\lambda > 0$, on a : $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$.

b) On étudie des fonctions puissances sur $\mathbb{R}_+^*$, par opérations la fonction est de classe $\mathcal{C}^2$.
Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{\theta} (c\theta x^{\theta-1}) [cx^\theta + (1-c)y^\theta]^{\frac{1}{\theta}-1} \\ &= cx^{\theta-1} [cx^\theta + (1-c)y^\theta]^{\frac{1-\theta}{\theta}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{\theta} ((1-c)\theta y^{\theta-1}) [cx^\theta + (1-c)y^\theta]^{\frac{1}{\theta}-1} \\ &= (1-c)y^{\theta-1} [cx^\theta + (1-c)y^\theta]^{\frac{1-\theta}{\theta}} \end{aligned}$$

$$\text{Pour } (x, y) \in \mathcal{D}, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = cx^{\theta-1} [cx^\theta + (1-c)y^\theta]^{\frac{1-\theta}{\theta}} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (1-c)y^{\theta-1} [cx^\theta + (1-c)y^\theta]^{\frac{1-\theta}{\theta}}$$

c) Fixons y réel strictement positifs. On sait d'après l'énoncé que c et $1-c$ sont positifs, donc pour tout réel x positifs, par produit somme et puissances de nombre positifs, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ est positif.

On pose pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\eta(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = cx^{\theta-1} [cx^\theta + (1-c)y^\theta]^{\frac{1-\theta}{\theta}}$$

Après calcul on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \eta(x) = c \left[c + \frac{K}{x^\theta} \right]^{\frac{1-\theta}{\theta}} \quad \text{avec } K = (1-c)y^\theta \in \mathbb{R}_+^*$$

On rappelle¹ que la composée de deux fonction de monotonies opposées est une fonction décroissante et que sur $\mathbb{R}_+^*$ la monotonie de $x \mapsto x^\alpha$ dépend du signe de α .

- Si $\theta > 0$ alors comme par définition $\theta < 1$, $\frac{1-\theta}{\theta} > 0$ et donc $x \mapsto c + \frac{K}{x^\theta}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs strictement positives et $u \mapsto u^{\frac{1-\theta}{\theta}}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition $x \mapsto \left[c + \frac{K}{x^\theta} \right]^{\frac{1-\theta}{\theta}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ de même pour η .
- Si $\theta < 0$ alors, $\frac{1-\theta}{\theta} < 0$ et donc $x \mapsto c + \frac{K}{x^\theta}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs strictement positives et $u \mapsto u^{\frac{1-\theta}{\theta}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par composition $x \mapsto \left[c + \frac{K}{x^\theta} \right]^{\frac{1-\theta}{\theta}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ de même pour η .

$$\text{Pour tout } y \in \mathbb{R}_+^*, x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ est décroissante à valeurs positives sur } \mathbb{R}_+^*$$

Les rôles de x et y étant très semblables dans les dérivées partielles par rapport à x et y , on montre de même que

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*, y \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \text{ est décroissante à valeurs positives sur } \mathbb{R}_+^*.$$

3. a) D'après la question précédente on peut calculer cette quantité .

Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)} \\ &= \frac{cx^{\theta-1} [cx^\theta + (1-c)y^\theta]^{\frac{1-\theta}{\theta}}}{(1-c)y^{\theta-1} [cx^\theta + (1-c)y^\theta]^{\frac{1-\theta}{\theta}}} && \text{question 2b} \\ &= \frac{cx^{\theta-1}}{(1-c)y^{\theta-1}} && \text{simplification} \\ &= \frac{c}{1-c} \left(\frac{x}{y} \right)^{\theta-1} \\ &= g(z) \end{aligned}$$

$$\text{Pour } (x, y) \in \mathcal{D}, G(x, y) = g(z).$$

1. vous devez savoir le démontrer

- b) g est dérivable sur son ensemble de définition.
Soit un réel $t > 0$,

$$\begin{aligned} s(t) &= -\frac{g(t)}{tg'(t)} \\ &= -\frac{\frac{c}{1-c}t^{-1+\theta}}{t \times (1-\theta)\frac{c}{1-c}t^{-1+\theta-1}} \\ &= -\frac{\frac{c}{1-c}t^{-1+\theta}}{(-1+\theta)\frac{c}{1-c}t^{-1+\theta}} \\ &= \frac{1}{1-\theta} \end{aligned}$$

Donc

Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, $s(t) = \frac{1}{1-\theta}$; l'élasticité de substitution est constante.

4. Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f\left(\frac{x}{y}, y\right) \\ &= f\left(\lambda \frac{x}{y}, \lambda\right) && \text{en posant } \lambda = y \\ &= \lambda f\left(\frac{x}{y}, 1\right) \text{ question 2a} \\ &= yw(z) \end{aligned}$$

pour tout $(x, y) \in \mathcal{D}$, on a : $f(x, y) = yw(z)$.

Partie II. Caractérisation des fonctions de production à élasticité de substitution constante.

Dans toute cette partie, on note Ψ une fonction définie et de classe C^2 sur $\mathcal{D}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant la condition $\Psi(1, 1) = 1$ et pour tout réel $\lambda > 0$, la relation : $\Psi(\lambda x, \lambda y) = \lambda \Psi(x, y)$.

De plus, on suppose que pour tout $y > 0$ fixé, la fonction $x \mapsto \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y)$ est strictement positive et strictement décroissante et que pour tout $x > 0$ fixé, la fonction $y \mapsto \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y)$ est également strictement positive et strictement décroissante.

5. Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall t > 0$, $v(t) = \Psi(t, 1)$.

- a) D'après le théorème sur la composée de fonction (*cf* cours) la fonction $t \mapsto \Psi(t, 1)$ est C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ pour $t \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} v'(t) &= 1 \frac{\partial \Psi}{\partial x}(t, 1) + 0 \times \frac{\partial \Psi}{\partial y}(t, 1) \\ &= \frac{\partial \Psi}{\partial x}(t, 1) \end{aligned}$$

D'après l'énoncé cette quantité est strictement positive.

La fonction v est de classe C^2 , strictement croissante $\mathbb{R}_+^*$.

- b) On a vu que $v'(t) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}(t, 1)$. Or d'après l'énoncé, pour tout $y > 0$ fixé, $x \mapsto \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y)$ est strictement décroissante.
Donc

v' est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme en plus on vient de démontrer que v est deux fois dérivable, on en déduit

$$v'' \text{ est négative sur } \mathbb{R}_+^*.$$

- c) Comme v' est une fonction décroissante à valeur positives sur $\mathbb{R}_+^*$, par produit $t \mapsto tv'(t)$ est une fonction décroissante à valeur positives sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc $t \mapsto -tv(t)$ est une fonction croissante à valeur positives sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme de plus $t \mapsto v(t)$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ par somme

φ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \mu$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \varphi(x) \geq \mu.$$

Comme de plus $\mu \geq 0$

$$\varphi \text{ est à valeurs strictement positives.}$$

De plus on vu dans 5a que v' est à valeurs positives donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad \varphi(t) \leq v(t)$$

Donc comme v est croissante

$$\forall t \in [0, 1] \quad v(t) \leq v(1) = \Psi(1, 1) = 1$$

On a donc démontré que

$$\forall t \in [0, 1] \quad \varphi(t) \leq 1$$

en passant à la limite

$$\mu \leq 1$$

- d) On a déjà fait le même raisonnement, il faut utiliser la propriété (homogénéité)
 "pour tout réel $\lambda > 0$, la relation : $\Psi(\lambda x, \lambda y) = \lambda \Psi(x, y)$. "
 6. a) La fonction h est bien définie car φ est strictement positive.
 Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$

$$\Psi(x, y) = yv\left(\frac{x}{y}\right)$$

En dérivant par rapport à la variable x

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y) = y \times \frac{1}{y} v'\left(\frac{x}{y}\right) = v'(z)$$

En dérivant par rapport à la deuxième variable

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y) = 1v\left(\frac{x}{y}\right) - y \times \frac{x}{y^2} v'\left(\frac{x}{y}\right) = v(z) - zv'(z) = \varphi(z)$$

$$\text{Pour tout } (x, y) \in \mathcal{D}, \text{ on a : } \frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y)} = h(z).$$

- b) On sait que v' est à valeurs strictement positives (5a) et φ est à valeurs strictement positives (5b) donc

h est à valeurs strictement positives

De plus comme v' est décroissante à valeurs positives et φ est croissante à valeurs positives, alors par quotient h est décroissante et donc h' est à valeurs négatives.

σ est à valeurs strictement positives.

7. Les fonctions σ et h sont celles qui ont été définies dans la question 6. On suppose que la fonction σ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$; on note σ_0 cette constante et on suppose $\sigma_0 \neq 1$. On pose : $r = 1 - \frac{1}{\sigma_0}$.

a) On a supposé que σ était constante

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad h(t) = -th'(t)\sigma_0 = \frac{1}{1-r}h'(t)$$

Comme h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ ℓ l'est aussi par produit.

Soit $t > 0$

$$\begin{aligned} \ell'(t) &= (1-r)t^{-r}h(t) + t^{1-r}th'(t) \\ &= -(1-r)t^{-r}\frac{1}{1-r}h'(t) + t^{-r}h'(t) && \text{calcul précédent} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle ℓ est une fonction constante égale par exemple à $\ell(1) = h(1)1^{1-r} = h(1)$

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $h(t) = h(1)t^{r-1}$

Remarque On pouvait démontrer que h vérifie l'équation différentielle $h'(t) = -\frac{1-r}{t}h(t)$ et résoudre cette équation.

b) On pose pour $t \in \mathbb{R}_+^*$

$$m(t) = \frac{(v(t))^r}{1+h(1)t^r}$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\begin{aligned} m'(t) &= \frac{rv'(t)(v(t))^{r-1}(1+h(1)t^r) - (v(t))^r rh(1)t^{r-1}}{(1+h(t)t)^2} \\ &= r(v(t))^{r-1} \frac{v'(t)(1+h(1)t^r) - v(t)h(1)t^{r-1}}{(1+h(t)t)^2} \\ &= r(v(t))^{r-1} \frac{v'(t) + h(1)t^{r-1}(tv'(t) - v(t))}{(1+h(t)t)^2} \\ &= r(v(t))^{r-1} \frac{v'(t) - h(1)t^{r-1}\varphi(t)}{(1+h(t)t)^2} \\ &= r(v(t))^{r-1} \frac{v'(t) - h(t)\varphi(t)}{(1+h(t)t)^2} && \text{résultat précédent} \\ &= r(v(t))^{r-1} \frac{v'(t) - v'(t)}{(1+h(t)t)^2} && \text{définition en 6a} \\ &= 0 \end{aligned}$$

La fonction m est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} m(t) &= m(1) = \frac{v(1)^r}{1+h(1)} \\ &= \frac{\Psi(1,1)}{1+h(1)} && \text{définition de } v \text{ en 5a} \\ &= \frac{1}{1+h(1)} && \text{hypothèses sur } \Psi \text{ en début de partie II} \end{aligned}$$

Donc par définition de m

$$\frac{(v(t))^r}{1+h(1)t^r} = \frac{1}{1+h(1)}$$

puis

$$(v(t))^r = \frac{1+h(1)t^r}{1+h(1)}$$

et comme les quantités sont positives

$$\text{Pour tout réel strictement positif } t, v(t) = \left(\frac{1+h(1)t^r}{1+h(1)} \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Remarque En partant de 5c et 6a on pouvait aussi montrer que v vérifie l'équation différentielle $v'(t) = \frac{1}{1+th(t)}v(t)$ puis résoudre cette équation.

c) Soit $(x, y) \in \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) &= yv\left(\frac{x}{y}\right) && \text{5e} \\ &= y \left(\frac{1+h(1)\left(\frac{x}{y}\right)^r}{1+h(1)} \right)^{\frac{1}{r}} && \text{question précédente} \\ &= \left(y^r \frac{1+h(1)\left(\frac{x}{y}\right)^r}{1+h(1)} \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \left(\frac{h(1)}{1+h(1)}x^r + \frac{1}{1+h(1)}y^r \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \left(\frac{h(1)}{1+h(1)}x^r + \left(1 - \frac{h(1)}{1+h(1)}\right)y^r \right)^{\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

$$a = \frac{h(1)}{1+h(1)}$$

d) Quelle conclusion peut-on tirer des résultats des questions b) et c) ?