DM 09

BCPST Spé

Réponses

1. (a) Résolvons tout d'abord le système $AX = 0$.

$$AX = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrl} & - & y & - & z & = 0 \\ -x & & & - & z & = 0 \\ x & + & y & + & 2z & = 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -z \\ x = -z \\ 0 = 0 \end{array}\right.$$

Donc on a en fait $F_A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ -x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}(U)$

F_A est le sous-espace engendré par (U) donc $\boxed{F_A \text{ un espace vectoriel.}}$

La famille (U) est génératrice de F_A et de plus cette famille est libre car constituée d'un seul vecteur non nul. $\boxed{\text{La famille } (U) \text{ est une base de } F_A.}$

(b) Résolvons tout d'abord le système $AX = X$.

$$AX = X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrl} -x & - & y & - & z & = 0 \\ -x & - & y & - & z & = 0 \\ x & + & y & + & z & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x + y + z = 0$$

Donc on a en fait $E_A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

E_A est le sous-espace engendré par la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ donc $\boxed{E_A \text{ un espace vectoriel.}}$

La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de E_A et cette famille est libre car formée de deux vecteurs visiblement non proportionnels.

$\boxed{\text{La famille } \left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_A.}$

(c) • On remarque tout d'abord que V et W satisfont bien $AV = V$ et $AW = W$, donc la famille (V, W) est une famille de vecteurs de E_A.

• De plus, d'après la question précédente E_A est de dimension 2 et la famille (V, W) contient 2 vecteurs. Il suffit de montrer que cette famille est libre pour conclure que c'est une base de E_A.

On cherche tous les réels a et b tels que

$$aV + bW = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -a+2b=0 \\ -a-b=0 \\ 2a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=0$$

La famille (V, W) est une famille libre de deux vecteurs de E_A qui est de dimension 2.

$\boxed{(V, W) \text{ est donc une base de } E_A.}$

(d) i.

$$xU + yV + zW = 0 \Longrightarrow xAU + yAV + zAW = A0 \Leftrightarrow yV + zW = 0$$

car $AU = 0$, $AV = V$ et $AW = W$. *(attention la première étape est une implication et non une équivalence car la matrice A n'est pas inversible.)*

ii. Reprenons le calcul. Comme on a montré que la famille (V, W) est libre, on a $yV + zW = 0 \Leftrightarrow y = z = 0$.

Donc $xU + yV + zW = 0 \Longrightarrow y = z = 0$ et $xU = 0$. Or $U \neq 0$ donc $x = 0$.

Par conséquent on a : $xU + yV + zW = 0 \Longrightarrow x = y = z = 0$. L'implication réciproque est évidemment vraie.

La famille (U, V, W) est donc une famille libre et Card $(U, V, W) = 3 = \text{Dim}\ (\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$.

$\boxed{(U, V, W) \text{ est donc une base de } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$

(e) • On pose $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On a alors

$$PX=Y \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z=a \\ x-y-z=b \\ -x+2y-z=c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z=a & \\ 3z=b-a & L_2 \leftarrow L_1-L_2 \\ y+z=a+c & L_3 \leftarrow L_1+L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z=a & \\ y+z=a+c & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ 3z=b-a & \end{cases}$$

Le système est de rang 3 donc P est bien inversible. Continuons la résolution pour déterminer P^{-1} :

$$PX=Y \Leftrightarrow \begin{cases} x=a+y-2z \\ y=a+c-\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}a \\ z=\frac{1}{3}b-\frac{1}{3}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a+b+c \\ y=\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b+c \\ z=-\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b \end{cases}$$

Donc $\boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2/3 & 1/3 & 1 \\ 1/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}.}$

• De plus $PD=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{PDP^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}=A.}$

On a donc $A^2=PDP^{-1}PDP^{-1}=PD^2P^{-1}=PDP^{-1}=A$.

2. (a) *Remarque : On ne peut pas ici mettre E_A et F_A sous forme d'espace engendré car on ne connait pas la matrice A. Il faut donc montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ en revenant à la définition.*

• E_A et F_A sont deux sous-ensembles de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

• On a $A0=0$ donc $0 \in E_A$ et $0 \in F_A$.

Ainsi E_A et F_A ne sont pas vides.

• Soient X et Y deux vecteurs de E_A et a et b deux réels.

On a $A(aX+bY)=aAX+bAY=aX+bY$ car $AX=X$ et $AY=Y$.

Donc $aX+bY \in E_A$

E_A est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc $\boxed{E_A \text{ un espace vectoriel.}}$

- Soient X et Y deux vecteurs de F_A et a et b deux réels.
  On a $A(aX+bY) = aAX+bAY = a0+b0 = 0$ car $AX=0$ et $AY=0$.
  Donc $aX+bY \in F_A$
  F_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc $\boxed{F_A \text{ un espace vectoriel.}}$

(b) Supposons que $U = V+W$.
En multipliant par A on obtient $AU = AV+AW = V+0$ car $V \in E_A$ et $W \in F_A$.
Donc on a $\boxed{V = AU}$. Et comme $W = U-V$ on a $\boxed{W = U-AU = (I-A)U.}$

(c) • Pour montrer que $AU \in E_A$, il faut montrer que $A(AU) = AU$.
Or on a $A(AU) = A^2U = AU$ car $A^2 = A$. Dons on a bien $\boxed{AU \in E_A.}$
• Pour montrer que $(I-A)U \in F_A$ il faut montrer que $A(I-A)U = 0$.
Or on a $A(I-A)U = AU-A^2U = AU-AU = 0$ toujours car $A^2 = A$. Donc on a bien $\boxed{(I-A)U \in F_A.}$

(d) Il y a deux choses à montrer dans cette questions : l'existence et l'unicité.
• D'après la question 2. c), si on pose $V = AU$ et $W = (I-A)U$, on a bien $V+W = U$ et $V \in E_A$ et $W \in F_A$.
• D'après la question 2. b), si on a $U = V+W$ avec $V \in E_A$ et $W \in F_A$ alors la seule possibilité est $V = AU$ et $W = (I-A)U$.
<u>Conclusion :</u> Il existe un unique $V \in E_A$ ($V = AU$) et un unique $W \in F_A$ ($W = (I-A)U$) tels que $U = V+W$.

3. (a) • <u>Génératrice?</u>
Soit $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ quelconque. D'après la question 2. d), il existe $V \in E_A$ et $W \in F_A$, uniques, tels que $U = V+W$.
La famille $(V_1,\cdots,V_p)$ est une base de E_A, donc il existe $a_1,\cdots,a_p$ des réels uniques tels que $V = a_1V_1+\cdots+a_pV_p$.
De même il existe $b_1,\cdots,b_q$ des réels uniques tels que $W = b_1W_1+\cdots+b_qW_q$.
On a donc $U = a_1V_1+\cdots+a_pV_p+b_1W_1+\cdots+b_qW_q$.
La famille $(V_1,\cdots,V_p,W_1,\cdots,W_q)$ est donc une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
• <u>Libre?</u>
On cherche $(a_1,\cdots,a_p,b_1,\cdots,b_q)$ des réels tels que : $a_1V_1+\cdots+a_pV_p+b_1W_1+\cdots+b_qW_q = 0$. En multipliant par A on obtient $a_1V_1+\cdots+a_pV_p = 0$ (car $AW_i = 0$) et comme la famille $(V_1,\cdots,V_p)$ est libre on a $a_1 = \cdots = a_p = 0$.
Donc $b_1W_1+\cdots+b_qW_q = 0$ et comme la famille $(W_1,\cdots,W_q)$ est libre on a $b_1 = \cdots = b_q = 0$.
La famille $(V_1,\cdots,V_p,W_1,\cdots,W_q)$ est donc libre.
• $\boxed{\text{La famille } (V_1,\cdots,V_p,W_1,\cdots,W_q) \text{ est bien une base de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).}$

(b) La famille précédente contient $p+q$ vecteurs et c'est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel de dimension n.
Donc on a bien $\boxed{\text{Dim } E_A + \text{Dim } F_A = n.}$