DM 08

BCPST Spé

Réponses

Partie 1 : Relations entre matrices.

On considère les matrices suivantes de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer P^2 puis en déduire que P est inversible et la valeur de P^{-1}.

RÉPONSE:

On calcule

$$\boxed{P^2 = 4I_4,\ P \text{ est inversible et } P^{-1} = \frac{1}{4}P}$$

❀

(b) Montrer que $P^{-1} \cdot J \cdot P$ et $P^{-1} \cdot K \cdot P$ sont diagonales.

RÉPONSE:

On calcule $\frac{1}{4}PJP$ et $\frac{1}{4}PKP$

$$\boxed{P^{-1} \cdot J \cdot P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} \cdot K \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

❀

(c) En déduire une matrice $D\left(\alpha,\beta\right)$ diagonale telle que $\alpha J+\beta K=P\cdot D\left(\alpha,\beta\right)\cdot P^{-1}$

RÉPONSE:

Soit α et β deux réels

$$\begin{aligned}\alpha J+\beta K &= \alpha P\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}+\beta P\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}P^{-1} \qquad \text{question précécente}\\
&= P\left[\alpha\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\right]P^{-1}\\
&= P\begin{pmatrix}2\alpha+\beta&0&0&0\\0&-2\alpha+\beta&0&0\\0&0&-\beta&0\\0&0&0&-\beta\end{pmatrix}P^{-1}\end{aligned}$$

$$\boxed{D(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}2\alpha+\beta&0&0&0\\0&-2\alpha+\beta&0&0\\0&0&-\beta&0\\0&0&0&-\beta\end{pmatrix}}$$

❀

Partie 2 : étude d'un mouvement aléatoire.

Dans cette partie, p désigne un réel de $[0;1[$.
Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3 et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet

1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4, le sommet 4 au sommet 1, les diagonales reliant le sommet 1 au sommet 3 ainsi que le sommet 2 au sommet 4.
Un pion se déplace sur les sommets du carré selon le protocole suivant :

- Le pion est sur le sommet 1 au départ.
- Lorsque le pion est à un instant donné sur un sommet du carré, il se déplace à l'instant suivant vers un sommet voisin(relié par un côté) avec la probabilité p ou vers un sommet opposé (relié par une diagonale) avec la probabilité $1-2p$.

On note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se trouve le pion à l'instant n. On a donc $X_0 = 1$.

2. (a) Ecrire la matrice A, carrée d'ordre 4, dont le terme situé à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne est égal à la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{X_n=j}(X_{n+1} = i)$.

RÉPONSE:

Comme $p+p+1-2p=1$, le mobile a une probabilité nulle de rester sur place.

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-2p & p \\ p & 0 & p & 1-2p \\ 1-2p & 0 & p & 0 \\ p & 1-2p & p & 0 \end{pmatrix}}$$

❀

(b) Vérifier que A s'écrit comme combinaison linéaire de J et K. (i.e qu'il existe des réels α et β telq que $A = \alpha J + \beta K$)

RÉPONSE:

$$\boxed{A = pJ + (1-2p)K}$$

❀

3. Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on pose $C_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \\ \mathbb{P}(X_n = 4) \end{pmatrix}$.

(a) Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que $C_{n+1} = AC_n$.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![1,4]\!]$

$$\begin{aligned} P(X_{n+1}=i) &= \sum_{j=1}^{4} P(X_n=j) P_{X_n=j}(X_{n+1}=i) && \text{SCE } \left([X_n=j]\right)_{j\in[\![1,4]\!]} \\ &= \sum_{j=1}^{4} a_{i,j} P(X_n=j) && A=(a_{i,j})_{i,j\in[\![1,4]\!]} \end{aligned}$$

On reconnaît alors la ligne i du produit matriciel AC_n.

$$\boxed{\text{Pour } n\in\mathbb{N}\ ,\ C_{n+1}=AC_n}$$

❀

(b) En déduire que $C_n = \frac{1}{4} P\cdot D\left(p,1-2p\right)^n PC_0$, où $D\left(p,1-2p\right)$ est la matrice trouvée au 1c puis donner la loi de probabilité de X_n pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

RÉPONSE:

On démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathscr{H}_n \ : \qquad C_n = P\cdot D\left(p,1-2p\right)^n P^{-1} C_0$$

Initialisation : Pour $n=0$

$$P\cdot D\left(p,1-2p\right)^0 P^{-1}C_0 = P\cdot I_4 P^{-1} C_0 = C_0$$

L

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$ supposons que

$$C_n = P\cdot D\left(p,1-2p\right)^n P^{-1} C_0$$

alors

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= AC_n && \text{question précédente} \\ &= PD(p,1-2p)P^{-1}C_n && \text{question 1 c} \\ &= PD(p,1-2p)P^{-1}PD\left(p,1-2p\right)^n P^{-1}C_0 && \text{HR} \\ &= PD(p,1-2p)D\left(p,1-2p\right)^n P^{-1}C_0 \\ &= PD\left(p,1-2p\right)^{n+1} P^{-1}C_0 \end{aligned}$$

Conclusion : D'après le principe de récurrence

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad C_n = P\cdot D\left(p,1-2p\right)^n P^{-1}C_0$$

En utilisant 1a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad C_n = \frac{1}{4} P \cdot D\big(p, 1-2p\big)^n \, PC_0}$$

$$D(p,1-2p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-4p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2p-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2p-1 \end{pmatrix}$$

On sait calculer les puissances d'une matrice diagonale

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad D\big(p, 1-2p\big)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-4p)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2p-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (2p-1)^n \end{pmatrix}$$

L'énoncé donne

$$C_0 = \begin{pmatrix} P(X_0 = 1) \\ P(X_0 = 2) \\ P(X_0 = 3) \\ P(X_0 = 4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
C_{n+1} &= \frac{1}{4} PD(p,1-2p)^n PC_0 && \text{question précédente} \\
&= \frac{1}{4} PD(p,1-2p)^n \, (PC_0) && \text{associativité} \\
&= \frac{1}{4} P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-4p)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2p-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (2p-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} && \text{première colonne de } P \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ (1-4p)^n \\ (2p-1)^n \\ (2p-1)^n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + (1-4p)^n + (2p-1)^n + (2p-1)^n \\ 1 - (1-4p)^n + (2p-1)^n - (2p-1)^n \\ 1 + (1-4p)^n - (2p-1)^n - (2p-1)^n \\ 1 - (1-4p)^n - (2p-1)^n + (2p-1)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\text{Pour } n\in\mathbb{N},\ \begin{cases} P(X_n=1) & = \dfrac{1}{4}\left(1+(1-4p)^n+(2p-1)^n+(2p-1)^n\right)\\ P(X_n=2) & = \dfrac{1}{4}\left(1-(1-4p)^n+(2p-1)^n-(2p-1)^n\right)\\ P(X_n=3) & = \dfrac{1}{4}\left(1+(1-4p)^n-(2p-1)^n-(2p-1)^n\right)\\ P(X_n=4) & = \dfrac{1}{4}\left(1-(1-4p)^n-(2p-1)^n+(2p-1)^n\right)\end{cases}$$

❀

Le script python pour éviter les calculs en début de problème.

```
import numpy as np
import numpy.linalg as npla

J=np.array([[0,1,0,1],[1,0,1,0],[0,1,0,1],[1,0,1,0]])
K=np.array([[0,0,1,0],[0,0,0,1],[1,0,0,0],[0,1,0,0]])
P=np.array([[1,1,1,1],[1,-1,1,-1],[1,1,-1,-1],[1,-1,-1,1]])

print(np.dot(P,P))
print(np.dot(np.dot(P,J),P))
print(np.dot(np.dot(P,K),P))
```