Variables aléatoires à densité

BCPST Spé 2 Lycée Champollion Grenoble

Janvier 2025

Table des matières

Dans toute la suite les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

I Rappels et définitions

I.1 Rappels généraux

Définition 1 (Fonction caractéristique)**.**
Si A est un sous ensemble d'un ensemble E la fonction indicatrice de A est

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_A : & E & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & sinon \end{cases} \end{array}$$

Il faut connaître les théorèmes et définitions suivants de première année.

Définition 2 (Fonction de répartition)**.**
Soit X une variable aléatoire réelle. La fonction de répartition de X est définie par

$$\textit{Pour tout réel } x \qquad F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$$

Proposition 1 (Utilisation de la fonction de répartition pour le calcul de probabilité)**.**
On suppose que X est une variable aléatoire telle que sa fonction de répartition F_X soit continue sur $\mathbb{R}$. alors pour tout a et réels tels que $a < b$

$$\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$$

I.2 Définition

Définition 3 (Variable à densité)**.**
*On dit que X est **une variable à densité** si et seulement si la fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf **éventuellement en un nombre fini de points**.*

Proposition 2 (De la fonction de répartition à une densité)**.**
*Si X est une variable dont la fonction de répartition F_X vérifie les conditions précédentes alors **une** densité de X est donnée par la dérivée de F_X en tout point où cela a un sens. Plus précisément toute fonction f_X qui ne diffère de F'_X qu'en un nombre fini de point est une densité de X.*

Proposition 3 (Caractérisation d'une densité)**.**
Si f est une fonction positive, continue (sauf éventuellement en un nombre fini de points) et telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

Alors f est une densité d'une variable aléatoire.

Théorème 1 (D'une densité à une fonction de répartition)**.**
Si f_X est une densité de probabilité alors

$$F_X : x \mapsto \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ en tout point où f est continue .
De plus cette fonction est la fonction de répartition de X.
En un point x où f_X est continue, $F'_X(x) = f_X(x)$.

Théorème 2 (Calcul de probabilité à l'aide d'une densité)**.**
Si a et b sont deux réels ou $\pm\infty$ et si X est une variable aléatoire de densité f_X

$$\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

Méthode : Montrer qu'une fonction donnée est une densité

Si on donne f une fonction et que l'on demande de vérifier que f est la densité d'une certaine variable aléatoire il faut :

1. Montrer que f est positive.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ **sauf éventuellement en un nombre fini de points**
3. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** et vaut 1.

Méthode : Après avoir calculer $\mathbb{P}(X \leqslant x)$

Si après avoir calculer, en utilisant des raisonnements de probabilités, $\mathbb{P}(X \leqslant x)$ pour une variable aléatoire donnée, on demande de montrer que X est une variable à densité, il faut vérifier :

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ **sauf éventuellement en un nombre fini de points**

Dans ce cas là on peut affirmer que X est une variable aléatoire à densité dont peut calculer une densité en dérivant F.

Méthode (rare) : Montrer qu'une fonction est une fonction de répartition d'une variable à densité

Si on donne F une fonction et que l'on demande de vérifier que F est la fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire qui admet une densité il faut :

1. Montrer que F est croissante.
2. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$
3. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ **sauf éventuellement en un nombre fini de points**

Dans ce cas là on peut affirmer que F est la fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire dont peut calculer une densité en dérivant F.

Attention : On fera bien attention à faire la différence de contexte entre les deux dernières méthodes ainsi que la différence entre les résultats obtenus.

II Lois classiques

II.1 Lois uniformes

Définition 4 (Loi, uniforme sur $[0;1]$)**.**
La fonction $\mathbb{1}_{[0;1]}$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$\mathbb{1}_{[0;1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

définie une densité d'une loi de probabilité notée $\mathcal{U}([0;1])$.

La fonction de répartition est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par*

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Définition 5 (Loi uniforme sur $[a;b]$, avec $a < b$)**.**
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{ou } f = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a;b]}$$

définie une densité d'une loi de probabilité notée $\mathcal{U}([a;b])$ *La fonction de répartition est la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \\ 0 & \text{si } x \leqslant a \\ 1 & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$$

II.2 Lois exponentielles

Définition 6 (Densité et fonction de répartition)**.**
Soit $\lambda > 0$ *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ *ou* $f(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\lambda\exp(-\lambda x)$ *définie une densité d'une loi de probabilité notée* $\mathcal{E}(\lambda)$. *La fonction de répartition associée est :*

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{ou } F(x) = \left[1 - e^{-\lambda x}\right]\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

Démonstration :

II.3 Lois normales, dites de Laplace-Gauss

Définition 7 (Loi normale centrée réduite)**.**
La fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par* $\varphi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ *définie une densité d'une loi de probabilité notée* $\mathcal{N}(0,1)$. *La fonction de répartition associée est :*

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t \end{array}$$

Définition 8 (Cas général)**.**
Soit m *un réels et* σ *un réel positif ,la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $\varphi_{m,\sigma^2} : x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$

définie une densité d'une loi de probabilité notée $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$. *La fonction de répartition associée est :*

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{m,\sigma^2} : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}t \end{array}$$

III Espérance et variance

Dans ce chapitre X est une variable aléatoire réelle qui admet une densité f ou f_X si il y a besoin de différentier.

III.1 Espérance

Définition 9 (Espérance)**.**
On dit que X *admet une espérance si et seulement si l'intégrale* $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ *converge* ***absolument*** .

Dans ce cas là on note

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$$

Définition 10 (Variable centrée)**.**
On dit qu'une variable est ***centrée*** *si et seulement si son espérance est nulle.*

Théorème 3 (Espérance des loi classiques)**.**

- *Une variable aléatoire suivant la loi* $\mathscr{U}([0;1])$ *admet une espérance qui vaut* $\frac{1}{2}$.
- *Une variable aléatoire suivant la loi* $\mathscr{U}([a;b])$ *admet une espérance qui vaut* $\frac{a+b}{2}$.
- *Une variable aléatoire suivant la loi* $\mathscr{E}(\lambda)$ *admet une espérance qui vaut* $\frac{1}{\lambda}$.
- *Une variable aléatoire suivant la loi* $\mathscr{N}(0,1)$ *admet une espérance qui vaut* 0.
- *Une variable aléatoire suivant la loi* $\mathscr{N}(m,\sigma^2)$ *admet une espérance qui vaut* m.

Démonstration :

III.2 Densité nulle en dehors d'un segment

Proposition 4.
Soit X *une variable à densité, telle qu'une densité est nulle en dehors d'un intervalle* $[a;b]$*, alors* X *admet une espérance et*

$$a \leqslant E(X) \leqslant b$$

Démonstration :

III.3 Théorème de transfert

Pour calculer l'espérance d'une variable définie à partir d'une autre, **sans en calculer la loi**, on peut utiliser le théorème de transfert.

Théorème 4 (Théorème de transfert)**.**
Si X est une variable aléatoire admettant une densité f_X nulle en dehors d'un intervalle $]a;b[$ avec $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ et si g est une fonction ***continue sauf éventuellement en un nombre fini de points*** *sur $]a;b[$.*
Alors $g(X)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale

$$\int_a^b \qquad \mathrm{d}t$$

converge absolument.
Dans ce cas là

$$E(g(X)) = \int_a^b g(t) f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

Attention : Les hypothèses sont plus contraignantes que dans le cas discret.

Exemple : Soit X suivant une loi exponentielle de paramètre λ. Calculer l'espérance de $\min(1, X)$

Démonstration :

A

retenir

III.4 Variance

Remarque : Pour le lien entre parité de la densité et calcul de l'espérance, de la variance voir l'exercice de la feuille de TD.

Définition 11 (Moments d'ordre r)**.**
Soit X une variable aléatoire réelle et r un entier. On dit que X admet un moment d'ordre r si et seulement si X^r admet une espérance et on note

$$m_r(X) = E(X^r)$$

Proposition 5 (Critère d'existence d'un moment)**.**
Si X est une variable aléatoire X ayant pour densité f_X admet un moment d'ordre r si et seulement si l'intégrale suivante converge absolument

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

et alors

$$m_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

Définition 12 (Variance et écart-type)**.**
Par définition la variance est le moment d'ordre 2 de $X - E(X)$ si il existe

$$V(X) = m_2(X - E(X))$$

Et l'écart-type est

$$\sigma(X) =$$

Théorème 5 (Formule de Koening-Huygens)**.**
La variance d'une variable aléatoire X existe si et seulement si le moment d'ordre 2 existe et dans ce cas là l'espérance existe et

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 =$

III.4.a Lois classiques

Théorème 6.

- *Une variable aléatoire suivant la loi* $\mathscr{U}([0;1])$ *admet une variance qui vaut* $\dfrac{1}{12}$.
- *Une variable aléatoire suivant la loi* $\mathscr{U}([a;b])$ *admet une variance qui vaut* $\dfrac{(b-a)^2}{12}$
- *Une variable aléatoire suivant la loi* $\mathscr{E}(\lambda)$ *admet une variance qui vaut* $\dfrac{1}{\lambda^2}$
- *Une variable aléatoire suivant la loi* $\mathscr{N}(0,1)$ *admet une variance qui vaut* 1.
- *Une variable aléatoire suivant la loi* $\mathscr{N}(m,\sigma^2)$ *admet une variance qui vaut* σ^2.

Démonstration :

III.4.b Propriétés

Proposition 6 (Variance nulle)**.**
Une variable aléatoire à densité qui admet une variance nulle est presque sûrement constante i.e. *il existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\mathbb{P}(X = \alpha) = 1$$

Proposition 7.

Soir X une variable aléatoire à densité admettant une variance et a, b deux réels avec alors

$$V(aX+b) = a^2 V(X)$$

Définition 13 (Variable centrée et variable réduite)**.**
*On dit qu'une variable aléatoire est **centrée** si et seulement si elle admet une espérance et si*

$$E(X) =$$

*On dit qu'une variable aléatoire est **réduite** si et seulement si elle admet une variance et si*

$$V(X) =$$

Proposition 8 (Transformation en variable réduite-centrée)**.**
Soit X une variable aléatoire à densité admettant une variance non nulle. On note σ son écart-type. Alors

$$X^* =$$

est une variable aléatoire à densité réduite-centrée.

Démonstration :

IV Transfert

IV.1 Exemple de transfert $Y = \exp(X)$

On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $Y = \exp(X)$ calculons une densité de Y.

IV.1.a Exemple à connaître

Soit X une variable suivant la loi uniforme à densité sur l'intervalle $[0;1[$ et $\lambda > 0$. On pose $Y = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire réelle. Calculer une densité de Y.

Exercice 1.
Soit $X \hookrightarrow \mathscr{U}([0;1[)$ calculer l'espérance de $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-X)$.

V Généralisation de certains résultats vus au 1er semestre.

V.1 Indépendance

Définition 14 (Indépendance de deux variable aléatoires réelles)**.**
*Soit X et Y deux variables aléatoires réelles sont dit qu'elles sont **indépendantes** si et seulement si pour tout intervalle I et pour tout intervalle J, on a*

$$\mathbb{P}([X \in I] \cap [Y \in J]) = \mathbb{P}(X \in I)\mathbb{P}(Y \in J)$$

Exercice 2.
Soit X et Y deux variables suivant la loi uniforme sur $[0;1]$. On suppose que X et Y sont indépendantes. Calculer la loi de $\max(X,Y)$.

Définition 15 (Indépendance mutuelle de n variables aléatoires réelles)**.**
*Soit $(X_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une suite de variables aléatoires réelles. On dit qu'elles sont **mutuellement indépendantes** si et seulement si pour toute famille $(I_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ d'intervalles*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i \in I_i]\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(X_i \in I_i\right)$$

Définition 16 (Indépendance mutuelle d'une suite de variables aléatoires réelles)**.**

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles. On dit qu'elles sont ***mutuellement indépendantes*** *si et seulement si pour tout sous-ensemble fini $K \subset \mathbb{N}$* ***fini*** *et pour tout famille $(I_i)_{i\in K}$ d'intervalles*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in K} X_i \in I_i\right) = \prod_{i\in K} \mathbb{P}\left(X_i \in I_i\right)$$

***lemme* 1** (Lemme des coalitions)**.**
Si $(X_1, X_2, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots X_n)$ des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes. Alors toute variables aléatoire A qui est fonction des p premières et toute variable aléatoire B qui est fonction des $n-p$ dernières sont indépendantes.

V.2 Propriétés de la variance et de l'espérance

Proposition 9 (Croissance de l'espérance)**.**
Soit X et Y deux variables aléatoires qui admettent une espérance. On suppose que l'on a

$$\mathbb{P}(X \leqslant Y) = 1$$

alors

$$E(X) \leqslant E(Y)$$

La plupart du temps on prend plus simplement comme hypothèse $X \leqslant Y$.

Proposition 10 (Rappel : linéarité de l'espérance)**.**
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles admettant une espérance.
Alors $X + Y$ admet une espérance et

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Proposition 11 (Espérance d'un produit indépendant.)**.**
Soit X et Y deux variables aléatoires ***indépendantes*** *réelles admettant une espérance.*
Alors XY admet une espérance.

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Remarque : Nous n'avons pas besoin de savoir si X et Y sont des variables à densité, discrètes ou autres . . .

Proposition 12 (Variance d'une somme indépendante.)**.**
Soit X et Y deux variables aléatoires ***indépendantes*** *réelles admettant une variance alors $X + Y$ admet une variance.*

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

Proposition 13 (Généralisation à n variable aléatoires mutuellement indépendantes.)**.**
Soit X_1, X_2, . . . X_n des variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes alors

- *Si $X_1, \dots, X_n$ admettent une variance alors $X_1 + \cdots + X_n$ admet une variance et*

$$V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n)$$

- *Si $X_1, \dots, X_n$ admettent une espérance alors $X_1 X_2 \cdots X_n$ admet une espérance et et*

$$E(X_1 X_2 \cdots X_n) = E(X_1) \cdot E(X_2) \cdots E(X_n)$$

VI Somme de variable aléatoires

Les formules de cette parties doivent être rappelées dans une épreuve.

Théorème 7 (Somme de deux variables aléatoires à densité)**.**
Soit X une variable aléatoire dont on note f une densité, et Y une variable aléatoire dont on note g une densité. On suppose de plus que X et Y sont indépendantes, alors $X+Y$ admet une densité noté $f \star g$, où

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(x-t)\,\mathrm{d}t$$

et cette intégrale est bien convergente.

Proposition 14 (Commutativité du produit de convolution)**.**
Si les intégrales définissant $f \star g$ convergent, alors $f \star g = g \star f$.

Exemple : $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$, calculons une densité de $X+Y$.

VII Propriétés des lois usuelles

VII.1 Transformation affine de loi uniforme

Proposition 15.
Soit X une variable aléatoire à densité ALORS.
$X \hookrightarrow \mathscr{U}([0;1])$ *si et seulement si* $(b-a)X + a \hookrightarrow$

Démonstration :
À savoir faire !

Exemple : Nous allons recalculer l'espérance et la variance de $\mathscr{U}([a;b])$ en utilisant cette remarque.

VII.2 Lois normales

On rappelle qu'une densité d'une loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi_{m,\sigma^2}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Sa fonction de répartition est notée

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \Phi_{m,\sigma^2}(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_{m,\sigma}(t)\,\mathrm{d}t$$

Un cas particulier est la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ dont la densité est

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

et sa fonction de répartition

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Proposition 16 (Symétrie de la fonction de répartition de la loi normale)**.**
Avec les notations précédentes pour tout réel x

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Démonstration :

Proposition 17 (Transformation affine d'une loi normale)**.**
Soit X une variable aléatoire à densité alors.
$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ *si et seulement si* $aX+b \hookrightarrow \mathcal{N}($ $)$

Exemple : Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ alors $\sigma X + m$ suit la loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$.

Proposition 18 (Somme de lois normales)**.**
Soit X et Y deux variables aléatoires ***indépendantes*** *telles que :*

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m,\sigma^2) \qquad Y \hookrightarrow \mathcal{N}(m',\sigma'^2)$$

Alors

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{N}(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

Démonstration :

Exercice 3.
Soit $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires réelles suivant des lois normales. On suppose qu'elles sont mutuellement indépendantes. Adapter le résultat précédent à ce cas là.

VII.3 Loi sans mémoire

Proposition 19 (Loi sans mémoire/invariance temporelle)**.**
Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ alors pour tout réels s et t strictement positifs

$$P_{X \geqslant s}(X \geqslant s + t) = P(X \geqslant t)$$

Démonstration :

Proposition 20 (Réciproque)**.**
Si X est une variable à densité qui vérifie.

- *pour $P(X \leqslant 0) = 0$*
- *Pour tout réels s et t positifs*

$$P_{X>s}(X > s + t) = P(X > t)$$

Alors X suit une loi exponentielle.

Récapitulatif

Nom	Notation	Support	densité	Fonction de répartition	Espérance	Variance
uniforme	$\mathscr{U}([a;b])$	$[a;b]$ ou $]a;b[$ ou $[a;b[$ ou $]a;b]$	$\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \\ 0 & \text{si } x \leqslant a \\ 1 & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
uniforme	$\mathscr{U}([0;1])$	$[0;1]$,$]0;1[$ ou $[0;1[$ ou $]0;1]$	$\begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} x & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{12}$
exponentielle	$\mathscr{E}(\lambda)$	$\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_+^*$	$\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} 1-e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
normale	$\mathscr{N}(m,\sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$	Φ_{m,σ^2}	m	σ^2
normale centrée réduite	$\mathscr{N}(0,1)$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$	Φ	0	1