

INTÉGRATION

Calculs

Exercice 1.

En calculant des primitives déterminer si les intégrales suivantes convergent et si oui donner leurs valeurs.

$$1. \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$$

$$2. \int_1^{+\infty} \ln t \, dt$$

$$3. \int_1^{+\infty} te^{-t} \, dt$$

$$4. \int_1^{+\infty} te^{-t^2} \, dt$$

$$5. \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+t} \, dt$$

Exercice 2 (Intégrales classiques, à SAVOIR FAIRE).

- **Intégrales de Riemann.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$
- **Intégrales de Riemann.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$
- **Exponentielles.**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \, dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$

Exercice 3.

En utilisant des changement de variables ou des IPP déterminer si les intégrales suivantes convergent et si oui donner leurs valeurs.

$$1. \int_2^3 \frac{dt}{\sqrt{3-t}}$$

$$2. \int_0^1 \frac{\ln t \, dt}{t} \text{ (IPP)}$$

$$3. \int_0^{+\infty} te^{-t^2} \, dt$$

$$4. \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} \, dt$$

$$5. \int_0^1 \frac{e^t \, dt}{1-e^t}$$

$$6. \int_0^{+\infty} te^{-t} \, dt \text{ (IPP)}$$

Exercice 4 (Fraction rationnelle).

1. Trouver deux constantes a et b telles que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

2. Pour chacune des intégrales suivantes dire si elle converge ou non, dans le cas convergent, donner la valeur de l'intégrale.

$$(a) \int_0^1 \frac{dx}{x(x+1)}$$

$$(b) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$$

$$(c) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x(x+1)}$$

Exercice 5 (Bien choisir le découpage).

Prouver la convergence des intégrales suivantes et calculer leur valeur.

$$1. \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-|t-1|} \, dt$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-a|} \, dt \text{ où } a \text{ est une constante.}$$

Théorèmes de comparaisons

Exercice 6.

Les intégrales suivantes sont elles convergentes? On pourra utiliser les résultats de l'exercice 2

$$1. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}} : \text{utiliser } \leq \text{ ou } \sim$$

$$2. \int_0^1 \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}} : \text{utiliser } \sim$$

$$3. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}} : \leq \text{ ou } \sim$$

$$4. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x+\sqrt{x}} : \text{utiliser } \leq \text{ ou } \sim$$

$$5. \int_1^{+\infty} \frac{x\sqrt{x}+x}{x^3+x^2+x} \, dx : \text{utiliser } \sim$$

$$6. \int_0^1 \frac{x \, dx}{e^x-1}$$

Exercice 7.

Les intégrales suivantes sont elles convergentes?

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^x}$$

$$2. \int_0^{+\infty} \frac{x \, dx}{\sqrt{x^3+1}}$$

$$3. \int_0^1 \frac{x^2 \, dx}{e^x-1}$$

$$4. \int_0^1 \frac{\sqrt{x} \, dx}{e^x-1}$$

Exercice 8 (Plus dur).

Étudier la nature des intégrales suivantes

$$1. \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln(x) \, dx$$

$$2. \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \, dx}{e^x-1}$$

Exercice 9.

Les intégrales suivantes sont elles convergentes?

$$1. \int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^3}\right) \, dx$$

$$2. \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)+x} \, dx$$

$$3. \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)(1+x)} \, dx$$

$$4. \int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt{t}} \, dt$$

$$5. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-e^{-t}}} \, dt$$

Exercice 10.

Pour chacune des intégrales suivantes étudier si elle converge ou non.

1. $\int_0^1 \frac{dx}{x(x+1)}$
2. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$
3. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x(x+1)}$

Mélangés**Exercice 11** (Calculs).

Calculer, si elles convergent les intégrales suivantes

1. $\int_0^1 \ln(x) dx$
2. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt$
3. $\int_0^1 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt$
4. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{3^t} dt$
5. $\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$

Exercice 12 (Fractions rationnelle). 1. Trouver a , b et c tels que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}$$

2. Soit $a > 0$, En déduire la valeur de $\int_a^1 \frac{1}{x(1+x^2)} dx$
3. En utilisant des équivalents calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) \left(\frac{1}{1+x^2} - 1 \right)$$

4. En déduire la nature et la valeur éventuelle $\int_0^1 \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$

Exercice 13 (▲ Une récurrence).

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose si l'intégrale converge

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^n}{t^2} dt$$

1. Calculer I_0 .
2. Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\ln t)^n}{t^2} (t\sqrt{t}) = 0$.
3. En déduire qu'il existe un réel A tel que

$$\forall x \in [A; +\infty[\quad \frac{(\ln t)^n}{t^2} \leq \left(\frac{1}{t\sqrt{t}} \right)$$

4. En déduire que les intégrales sont convergentes.

5. À l'aide d'une intégration par partie, montrer que pour $n \in \mathbb{N}$

$$I_{n+1} = (n+1)I_n$$

6. En déduire une expression de I_n en fonction de n .
7. Trouver la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 14 (Autour de l'intégrale gaussienne).

En utilisant la valeur de l'intégrale Gaussienne, des changement de variable et des IPP, et des remarques de parité calculer

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$
2. $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$
3. $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$
4. $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$

Exercice 15.

On cherche à déterminer si l'intégrale suivante converge

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)(2+x)(3+x)}$$

1. Trouver un équivalent simple de la fonction en $+\infty$.
2. En déduire que l'intégrale converge.
3. Trouver trois constantes a , b et c telles que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$\frac{1}{(1+x)(2+x)(3+x)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+3}$$

4. En déduire la valeur de l'intégrale

Exercice 16 (▲ Changement de variable). 1. Montrer que pour $t \in [0; +\infty[$, $\ln t \leq \sqrt{t}$

2. En déduire que $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ converge.
3. En utilisant le changement de variables $u = 1/t$, montrer que $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ converge et donner sa valeur en fonction de l'intégrale précédente.
4. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt = 0$.
5. Soit $a > 0$. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2} dt$.

Pour aller plus loin**Exercice 17.**

Étudier la convergence des intégrales suivantes

- $\int_0^{+\infty} (x+2-\sqrt{x^2+4x+1}) dx$
- $\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln(x) dx$
- $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^3+1}}$

Exercice 18 (Intégrales à paramètres (dur et long)).

Étudiez la convergence des intégrales suivantes en fonction du ou des paramètres :

- $\int_1^{+\infty} \frac{x^m}{x^2+1} dx$ où $m \in \mathbb{R}$
- $\int_1^{+\infty} x^\alpha \ln(1+x^\beta) dx$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

Exercice 19 (Un calcul un peu compliqué mais détaillé).

On pose

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\ln x} & \text{si } x \in]0; 1[\\ f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

- Montrer que f est continue.
- $\int_0^1 f(t) dt$ est elle convergente?
- Soit $x \in]0; 1[$. En posant $u = t^2$, montrer que $\int_0^x \frac{t dt}{\ln t} = \int_0^{x^2} \frac{du}{\ln u}$.
- En déduire que $\int_0^x f(t) dt = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$
- Montrer que pour tout $t \in [x^2; x]$, on a

$$\frac{x}{t \ln t} \leq \frac{t}{t \ln t} \leq \frac{x^2}{t \ln t}$$

- En déduire que

$$x^2 \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \leq x \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t}$$

- Trouver une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$
- En utilisant le théorème des gendarmes montrer que

$$\int_0^1 f(t) dt = \ln 2$$

Exercice 20.

Soient $0 < a < b$.

- Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$.
- Soient $0 < x < y$. Démontrer que

$$\int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

- Démontrer que, pour tout réel $z > 0$,

$$e^{-bz} \ln \frac{b}{a} \leq \int_{az}^{bz} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq e^{-az} \ln \frac{b}{a}.$$

En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln \frac{b}{a}$$

Exercice 21.

- Démontrer la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^{3/4}} dx$. On pourra comparer avec $\frac{1}{x^\alpha}$ pour α bien choisi.
- Donner un équivalent simple au voisinage de 0 de $\ln(x + \sqrt{x}) - \ln(x)$
- En déduire la convergence de $\int_0^1 \frac{\ln(x + \sqrt{x}) - \ln(x)}{x^{3/4}} dx$.
- Donner un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ de $\ln(x + \sqrt{x}) - \ln(x)$. En déduire la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x}) - \ln(x)}{x^{3/4}} dx$.

Exercice 22 (Logarithme à la puissance n).

Après en avoir justifié l'existence, calculer par récurrence la valeur de $I_n = \int_0^1 (\ln x)^n dx$.