Applications Linéaires

Dans tout ce TD la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est 1, X, X^2,..., X^n

Généralités

Exercice 1 (Polynômes)**.**
Montrer que les applications suivantes sont linéaires.

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}^3 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) \end{array}$
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_3[X] & \to & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_3[X] & \to & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$
5. $f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \to & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \mapsto & P'(2X+1) + P(3X-1) \end{array}$
6. $f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$
7. $f_7 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & X^2 \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t + X \int_{-1}^1 P(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$
8. $f_8 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & ? \\ P & \mapsto & \int_0^1 P(X+t)\,\mathrm{d}t \end{array}$

Exercice 2 (Ensemble de matrice)**.**
On note $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et A une matrice carrée d'ordre n fixée. Les application suivantes sont elle linéaires?

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ M & \mapsto & M + M^{\mathrm{T}} \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ M & \mapsto & M^2 \end{array}$
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ M & \mapsto & AM \end{array}$
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ M & \mapsto & A^2 M \end{array}$

Exercice 3 (Ensemble de fonctions)**.**
On note E l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, Les application suivantes sont elle linéaires?

1. $\varphi_1 : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & f' + f \end{array}$
2. $\varphi_2 : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & x \mapsto f(x+2) \end{array}$
3. $\varphi_3 : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & f(0) f' \end{array}$
4. $\varphi_4 : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$

Exercice 4 ( )**.**
Soit E_1,E_2, F_1 et F_2 des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels .

1. On munit $E_1 \times E_2$ des opérations naturelles (?) démontrer rapidement que $E_1 \times E_2$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
2. Soit $f_1 \in L(E_1, F_1)$ et $f_2 \in L(E_2, F_2)$ On pose
$$\varphi : \begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 & \to & F_1 \times F_2 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & (f_1(x_1), f_2(x_2)) \end{array}$$
Montrer que φ est linéaire
3. Soit $g_1 \in L(E_1, F_1)$ et $g_2 \in L(E_2, F_1)$ on définit
$$\psi : \begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 & \to & ? \\ (x_1, x_2) & \mapsto & g_1(x_1) + g_2(x_2) \end{array}$$
Montrer que $\psi \in L(?, ?)$.
4. Soit $h_1 \in L(E, F_1)$ et $h_2 \in L(E, F_2)$ on note
$$\zeta : \begin{array}{ccc} E & \to & F_1 \times F_2 \\ u & \mapsto & (h_1(u), h_2(u)) \end{array}$$
Montrer que cette application est linéaire.

Noyau et image

Exercice 5 (Calcul de noyau : polynôme)**.**
Calculer les noyaux des fonctions linéaires de l'exercice 1

Exercice 6 (Calcul de noyaux : ensembles de matrices)**.**
Montrer que les applications suivantes sont linéaires et calculer leur noyau

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2 & \to & \mathscr{M}_2 \\ M & \mapsto & M + 2M^{\mathrm{T}} \end{array}$
2. $g : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2 & \to & \mathscr{M}_2 \\ M & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} M \end{array}$
3. $h : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2 & \to & \mathscr{M}_2 \\ M & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} M \end{array}$

Exercice 7 (Noyaux emboîtés)**.**
Soit φ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On note $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\ \varphi^2 \subset \mathrm{Im}\ \varphi$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}\ \phi \subset \mathrm{Ker}\ \varphi^2$
3. On pose $\Delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$
   (a) Calculer $\mathrm{Ker}\ \Delta$, $\mathrm{Ker}\ \Delta^2$
   (b) Conclure qu'il n'y a pas égalité entre ces deux ensembles
   (c) Faire de même avec les images.

Exercice 8 (⛰).
Soit

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}_{n-1}[X] \\ & P & \mapsto & P(X+1)-P(X) \end{array}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme. (ne pas oublier de vérifier que φ est bien définie)
2. Calculer le noyau de φ, on pourra commencer par montrer q'un polynôme du noyau vérifie pour tout entier $n\in\mathbb{N}$ $P(n)=P(0)$
3. Calculer sont son image
4. On remplace l'ensemble de départ et d'arrivée par $\mathbb{K}[X]$. Reprendre les questions précédentes

Exercice 9 (Équation différentielle).
On note E l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

1. On pose φ la fonction de E dans E telle que $\varphi(f)$ est la fonction définie par $x\mapsto f'(x)-xf(x)$
   (a) Montrer que φ est linéaire
   (b) Donner une base de Ker φ
   (c) φ est elle surjective?
2. On pose ψ la fonction de E dans E telle que $\psi(f)=f''+af'+bf$
   (a) Montrer que ψ est linéaire
   (b) Donner une base de Ker ψ

Exercice 10 (⛰ Produit cartésien).
On reprend les notations de l'exercice 4.

1. Calculer l'image et le noyau de φ.
2. Calculer le noyau de ζ

Applications linéaires, représentation matricielle dans les bases canoniques

Exercice 11.
Soit l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x-y+z, x-y). \end{array}$$

1. Écrire la matrice de l'application f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
2. Même question avec l'application linéaire g définie par :

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x+2y+3z, y+2z, 2x+3y+4z). \end{array}$$

Exercice 12.
Soit l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} d: & \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ & P & \longmapsto & P'. \end{array}$$

Écrire la matrice de cette application relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 13.
Soient les applications linéaires f et g définies par :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ & P & \mapsto & P(X+1). \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ & P & \mapsto & P(X-1). \end{array}$$

Écrire les matrices de ces applications relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, puis multiplier ces matrices entre elles. Que remarque t-on?

Exercice 14.

1. Écrire la matrice A relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$ de l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & P & \longmapsto & (P(0), P(1), P(2)). \end{array}$$

2. Montrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse.
3. Soient $a,b,c\in\mathbb{R}$, en déduire qu'il existe un unique polynôme P de degré 2 tel que $P(0)=a$, $P(1)=b$ et $P(2)=c$.
   Calculer en fonction de a, b et c ce polynôme.

Dans d'autres base

Exercice 15.

$$\text{Soit}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P(X+1)-P(X) \end{array}$$

1. Écrire la matrice de f dans les bases canoniques.
2. Écrire la matrice de f avec $\mathbb{R}_3[X]$ muni de la base $(1, 1+X, 1+X^2, 1+X^3)$ et $\mathbb{R}_2[X]$ muni de la base $(X(X-1), X(X+1), (X+1)(X-1)$.

Exercice 16.
On considère l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x,y,z)=(x+2y-2z, 2x+y-2z, 2x+2y-3z)$$

et $\mathbf{u_1}=(1,1,1)$, $\mathbf{u_2}=(-1,1,0)$ et $\mathbf{u_3}=(1,0,1)$.

1. Écrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer $f(\mathbf{u_1})$, $f(\mathbf{u_2})$ et $f(\mathbf{u_3})$ et écrire la matrice A' de f dans la base $\mathscr{B}'=(\mathbf{u_1},\mathbf{u_2},\mathbf{u_3})$.
3. Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 17.

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

- Définir l'application f telle que $A=\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f)$ où $\mathscr{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- Définir l'application g telle que $A=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
- Définir l'application h telle que $A=\mathrm{Mat}_{\mathscr{D}}(h)$ où $\mathscr{D}$ est la base $(1, 1+X, 1+X+X^2$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 18.
On reprend les notations de l'exo 14.
On pose $P_0=\frac{(X-1)(X-2)}{2}$, $P_1=\frac{X(X-2)}{-1}$ et $P_2=\frac{X(X-1)}{2}$.

1. Montrer que (P_0, P_1, P_2) forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$
2. Écrire la matrice de l'application f en prenant comme base de $\mathbb{R}_2[X]$ cette base et comme base de $\mathbb{R}^3$ la base canonique.
3. En déduire une expression de f^{-1} de la forme

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ & (a,b,c) & \mapsto & ? \end{array}.$$

Exercice 19.
Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (y,x,-x-y-z) \end{array}$

1. Écrire A la matrice de f dans la base canonique
2. Calculer A^2, en déduire $f \circ f$.
3. f est elle bijective ? si oui calculer sa bijection réciproque
4. Soit $\mathscr{B}' = ((1,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,1)$ montrer que c'est une base et calculer la matrice de f dans cette base. On note B cette matrice, quelle est le lien entre A et B

Matrices de passage

Exercice 20.
Soit $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire, dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer des vecteurs $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ non nuls tels que $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, $f(\mathbf{v}) = 2\mathbf{v}$, $f(\mathbf{w}) = -3\mathbf{w}$.
2. Montrer que la famille $\mathscr{B} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Écrire la matrice N de l'application f dans cette base.
4. Donner la matrice de passage P de la base canonique vers la base $\mathscr{B}$.
   Calculer son inverse P^{-1}.
5. Donner la relation entre les matrices M, N et P. En déduire le calcul de M^n.

Exercice 21.
Soit $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & X(P(X+1)-P(X-1)) \end{array}$

1. Écrire la matrice de φ dans la base canonique
2. En utilisant une matrice de passage écrire la matrice de φ dans la base $(1, -1+X, -X+X^2, -X^2+X^3)$

Exercice 22.
Soit $\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$

1. Écrire la matrice de φ dans la base canonique
2. En utilisant une matrice de passage écrire la matrice de φ dans la base $(X(X-1)(X-2), X(X-1)(X-3), X(X-2)(X-3), (X-1)(X-2)(X-3)$

Bases adaptées

Exercice 23.
Soit

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & \left(x, \frac{x+y-z}{2}, \frac{x-y+z}{2}\right) \end{array}$$

1. Écrire A la matrice de f dans la base canonique
2. Calculer A^2, en déduire $f \circ f$.
3. f est elle bijective ? si oui calculer sa bijection réciproque
4. Soit $\mathscr{B}' = ((0,1,1),(1,0,1),(0,1,-1)$ montrer que c'est une base et calculer la matrice de f dans cette base. On note B cette matrice, quelle est le lien entre A et B (on fera apparaître P une matrice de passage)

Exercice 24.
Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans leur base canonique respective est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

On appelle (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (f_1, f_2) celle de $\mathbb{R}^2$. On pose

$$e'_1 = e_2 + e_3,\ e'_2 = e_3 + e_1,\ e'_3 = e_1 + e_2 \text{ et } f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2),\ f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2).$$

1. Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ puis écrire la matrice de passage$P$ de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers cette base.
2. Montrer que (f'_1, f'_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ puis écrire la matrice de passage Q de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ vers cette base $\mathbb{R}^2$.On note B la matrice de u dans les bases (e'_1, e'_2, e'_3) (espace de départ) et (f'_1, f'_2) (espace d'arrivé). Trouver un lien entre A B eP et Q
3. Calculer B

Exercice 25.
Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-2z, y-2z, -z) \end{array}$

1. Écrire A la matrice de f dans la base canonique
2. Calculer A^2, en déduire $f \circ f$.
3. f est elle bijective ? si oui calculer sa bijection réciproque
4. Soit $\mathscr{B}' = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)$ montrer que c'est une base et tracer(directement) la matrice de f dans cette base.
5. On note B cette matrice, quelle est le lien entre A et B.On fera intervenir P une matrice de passage.

Exercice 26.
Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

1. Montrer qu'il existe $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^2(\mathbf{u}) \neq \mathbf{0}$.
2. Montrer que $\mathscr{B} = \left(\mathbf{u},\ f(\mathbf{u}),\ f^2(\mathbf{u})\right)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. En déduire que c'est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Écrire la matrice de f dans cette base.
4. À l'aide de $\mathscr{B}$ trouver une base de Ker f et une base de Im f.

Théorème du rang, image, noyaux

Exercice 27.
On désigne par $\mathscr{B} = (\mathbf{e_1},\ \mathbf{e_3},\ \mathbf{e_3},\ \mathbf{e_4})$ la base canonique de R^4, et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f et le rang de f.
2. Montrer que $\mathscr{B}' = (\mathbf{e_3},\ \mathbf{e_1} - \mathbf{e_4},\ -2\mathbf{e_2},\ \mathbf{e_1} + \mathbf{e_4})$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

3. Ecrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

Exercice 28.
Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même défini par $f(x,y,z,t) = (x-y+z, y+z+t, 0, x+y+3z+2t)$.

1. Déterminer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1,e_2,e_3,e_4) de $\mathbb{R}^4$.
2. Écrire la matrice A représentant l'endomorphisme f dans cette base.
3. Montrer que $f(e_3)$ et $f(e_4)$ sont combinaisons linéaires de $f(e_1)$ et $f(e_2)$.
4. En déduire la dimension de Im (f) et une base de Im (f).
5. Quelle est la dimension du noyau de f ? Montrer que la famille de vecteurs (u,v) avec $u = (-2,-1,1,0)$ et $v = (-1,-1,0,1)$ forme une base de Ker (f).

Exercice 29.
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donner une base de Ker (f) et de Im (f), et le rang de f.

Exercice 30.
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Donner une base de Ker (f) et de Im (f) ainsi que le rang de f.
2. Montrer que Im $f \subset$ Ker f.
3. En déduire que $M^n = 0$ pour tout $n \geqslant 2$.

Pour aller plus loin

Exercice 31 (Polynômes de Lagrange)**.**
Cet exercice généralise l'exercice 14 Soit $n \geq 1$ un entier. On se donne $(n+1)$ réels $x_0,\dots,x_n$ deux à deux distincts, et $y_0,\dots,y_n$ une autre liste de $(n+1)$ réels (non nécessairement deux à deux distincts). On appelle polynôme interpolateur des y_i aux points x_i un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout $i = 0,\dots,n$. Pour tout entier $i = 0,\dots,n$, on définit le polynôme L_i de $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$L_i = \prod_{k=0,k\neq i}^{n} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}$$

1. Pour i et j dans $[\![0, n]\!]$, donner une expression simple de $L_i(x_j)$
2. On pose $P(X) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(X)$. Démontrer que P est un polynôme interpolateur des y_i aux points x_i.
3. Démontrer qu'il existe un unique polynôme interpolateur des y_i aux points x_i dans $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Que peut on dire de la famille $(L_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$?
5. **Interprétation en terme d'application linéaire**.
   On pose
   $$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{n+1} & \to & \mathbb{K}_n[X] \\ (y_0,\dots,y_n) & \mapsto & \sum_{i=0}^n y_i L_i(X) \end{array}$$
   Montrer que cette application est un isomorphisme.
6. **python**
   (a) Écrire une fonction `lagrange` qui prend en arguments une liste x de points d'interpolation x_i, une liste y de valeurs y_i, de même longueur que x, a un réel, et qui renvoie la valeur de $P(a)$, où P est le polynôme interpolateur défini précédemment.
   (b) Sur un même graphique faire apparaître les graphes de $x \mapsto \sin(x)$ et du polynôme interpolateur de cette fonction au points $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{2\pi}{n} \dots x_k = \frac{2\pi}{n}, \dots, x_n = 2\pi$
   (c) Que se passe t il quand n devient grand ?

Exercice 32.
Soit f et g deux endomorphisme de E un espace vectoriel. Montrer que $f \circ g = 0$ si et seulement si Im $g \subset$ Ker f.

Exercice 33 (Endomorphismes qui commutent, noyaux et images)**.**
Soit E un espace vectoriel et $u, v \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $u \circ v = v \circ u$. Démontrons que ker(u) et Im u sont stables par v, c'est-à -dire que

$$\forall x \in \text{Ker } u, \quad v(x) \in \text{Ker } u \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \text{Im } u, \quad v(x) \in \text{Im } u.$$

Exercice 34.
Soient α, β deux réels et

$$M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de α et β pour lesquelles l'application linéaire associée à $M_{\alpha,\beta}$ est surjective.

Exercice 35 (Image égale au noyau)**.**
On suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie égale à n et que

$$\text{Im } f = \text{Ker } f$$

Montrer que $f^2 = 0$ et que $n = 2\,\text{rg}(f)$.
La réciproque est elle vraie ?

Exercice 36 (Endomorphisme nilpotent)**.**
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et f un endomorphisme de E et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$f^p = 0 \qquad f^{p-1} \neq 0$$

On rappelle que

$$f^p = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \circ f}_{p \text{ fois}}$$

1. Préciser ce que veut dire $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$
2. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que
   $$(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1})$$
   est une famille libre.
   indication choisir un $x \in E$ tels que $f^{p-1}(x) \neq 0$ et supposer que $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est liée.

Exercice 37.
On considère l'application linéaire :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) - P(X). \end{array}$$

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Ker f^n et Im f^n.

Exercice 38.
Soient λ un nombre réel et f l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & XP' - \lambda P. \end{array}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer, suivant les valeurs de λ, le noyau de f.

Exercice 39 (Image de certaines familles).
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ où E et f sont de dimension finie Soit $\mathscr{E} = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \dots, \mathbf{e_p})$ une famille de E. On note $\mathscr{F} = (f(\mathbf{e_1}), f(\mathbf{e_2}), \dots, f(\mathbf{e_p}))$

1. On suppose que $\mathscr{F}$ est libre, montrer que $\mathscr{E}$ est libre.
2. On suppose que f est injective et $\mathscr{E}$ libre. Montrer que $\mathscr{F}$ est libre.
3. On suppose que f est et $\mathscr{E}$ génératrice de E . Montrer que $\mathscr{F}$ est génératrice de .
4. Trouver un contre exemple avec f injective et $\mathscr{E}$ génératrice de E et $\mathscr{F}$ n'est pas génératrice de F
5. On suppose que pour toute famille de E, son image par f est libre montrer que dans ce cas f est injective
6. Énoncer et démontrer un résultat analogue pour f surjective?

Problèmes, applications

Exercice 40.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire, dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer un vecteur $\mathbf{e_1} \neq 0$ tel que $f(\mathbf{e_1}) = \frac{1}{2}\mathbf{e_1}$.
2. Déterminer un vecteur $\mathbf{e_2} \neq 0$ tel que $f(\mathbf{e_2}) = \mathbf{e_1} + \frac{1}{2}\mathbf{e_2}$.
3. Montrer que $(\mathbf{e_1},\ \mathbf{e_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
4. Écrire la matrice de passage P de la base canonique vers la base $(\mathbf{e_1},\ \mathbf{e_2})$.
5. Calculer l'inverse de P, et écrire la matrice T de f dans la base $(\mathbf{e_1},\ \mathbf{e_2})$.
6. Quelle est la relation entre les matrices M, P et T ?
7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$T^n = \begin{pmatrix} 1/2^n & 2n/2^n \\ 0 & 1/2^n \end{pmatrix}.$$
8. En déduire l'expression de M^n en fonction de n.
9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 9$ et la relation de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$
   (a) On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$U_n = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$u_n = (17n+1).\frac{1}{2^n}.$$
   (c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente? Si oui, quelle est sa limite?

Exercice 41.
1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$
   (a) Montrer Im $f = \mathrm{Vect}(u)$ avec $\overrightarrow{u} = (1, -3, -2)$.
   (b) On pose $v = (1, 1, 0)$,Montrer que (u, v) forme une base de Ker f
   (c) En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f n'a qu'un coefficient non nul.
   (d) Calculer M^k pour tout entier $k \geq 0$.
2. Même question avec
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 42.
Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties. Ses observations lui permettent d'affirmer que :

- s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$.
- s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$.
- s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$.
- s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : le joueur gagne la $n^{\text{ième}}$ partie.
De plus, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n \qquad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n \qquad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \qquad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}$$

1. On admet que (E_n, F_n, G_n, H_n) est un système complet d'événements.
   (a) Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a : $\mathbb{P}(E_{n+1}) = \dfrac{2}{3}\mathbb{P}(E_n) + \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(F_n)$.
   (b) Exprimer de la même façon (aucune explication n'est exigée) les probabilités $P(F_{n+1})$, $\mathbb{P}(G_{n+1})$ et $\mathbb{P}(H_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(E_n)$, $\mathbb{P}(F_n)$, $\mathbb{P}(G_n)$ et $\mathbb{P}(H_n)$.
   (c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(E_n) \\ \mathbb{P}(F_n) \\ \mathbb{P}(G_n) \\ \mathbb{P}(H_n) \end{pmatrix}$.
   Vérifier que $U_{n+1} = MU_n$, où $M = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$.

2. (a) Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner son inverse.

(b) On note C_1, C_2, C_3 et C_4 les colonnes de P. Calculer MC_1, MC_2, MC_3 et MC_4,

(c) Justifier que $M = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale que l'on déterminera.

Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.

3. (a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = PD^nP^{-1}$.

(b) Montrer, également par récurrence, que : $\forall n \geqslant 2, \quad U_n = M^{n-2}U_2$.

(c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, donner la première colonne de M^n, puis en déduire $\mathbb{P}(E_n)$, $\mathbb{P}(F_n)$, $\mathbb{P}(G_n)$ et $\mathbb{P}(H_n)$.

(d) Montrer que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(E_n) = \frac{3}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(F_n) = \frac{2}{10}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(G_n) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(H_n) = \frac{3}{10}$$

4. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le joueur gagne la $k^{\text{ième}}$ partie et qui vaut 0 sinon (X_1 et X_2 sont donc deux variables certaines).

(a) Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, exprimer A_k en fonction de E_k et F_k.

(b) En déduire, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la loi de X_k.

5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note S_n la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur lors des n premières parties.

(a) Calculer $\mathbb{P}(S_n = 2)$ en distinguant les cas $n = 2$, $n = 3$ et $n \geqslant 4$.

(b) Déterminer $\mathbb{P}(S_n = n)$.

(c) Pour tout entier n supérieur ou égal à 3, écrire S_n en fonction des variables X_k, puis déterminer $E(S_n)$ en fonction de n.