

Espaces vectoriels.

BCPST Spé 2 Lycée Champollion Grenoble

Novembre 2024

Table des matières

I	Espaces vectoriels	2
I.1	Définition	2
I.2	Exemples fondamentaux	3
I.3	Sous-espaces vectoriels	4
I.4	Opérations sur les espaces vectoriels	5
II	Familles de vecteurs	5
II.1	Bases	5
II.2	Sous-espace vectoriel engendré par une famille	7
II.3	Familles libres, familles génératrices et bases.	7
II.4	Méthodes	8
III	Espaces vectoriels de dimension finie	11
III.1	Définition et exemples	11
III.2	Le théorème de la dimension finie	11
III.3	Le théorème de la base incomplète.	11
III.4	Caractérisation des bases en dimension finie	12
III.5	Sous espaces vectoriels et rang	13
IV	Représentation matricielle	13
IV.1	Matrices colonnes des coordonnées	14

Dans tout ce cours \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

I Espaces vectoriels

I.1 Définition

Définition 1 (Loi interne et loi externe).

Une **loi interne** sur E est une application

$$\begin{aligned} * : E \times E &\rightarrow E \\ (u, v) &\mapsto u * v \end{aligned}$$

Une **loi externe** (à gauche) sur E est une application

$$\begin{aligned} \bullet : \mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (\lambda, v) &\mapsto \lambda \bullet v \end{aligned}$$

Définition 2 (Espaces vectoriels sur \mathbb{K}).

Un **espace vectoriel** est un ensemble E , muni d'une loi interne "+" et d'une loi externe "." qui vérifient

1. + est associative et commutative i.e.

$$\forall \mathbf{u} \in E, \forall \mathbf{v} \in E, \forall \mathbf{w} \in E \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \quad (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

2. Il existe un élément $\mathbf{0}_E$ (noté plus tard 0 lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté) tel que

$$\forall \mathbf{u} \in E \quad \mathbf{u} + \mathbf{0}_E = \mathbf{u}$$

3. Tout élément de E est inversible pour + i.e.

$$\forall \mathbf{u} \in E \quad \exists \mathbf{v} \in E \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}_E$$

- 4.

$$\forall \mathbf{u} \in E \quad 1_{\mathbb{K}} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$$

- 5.

$$\forall \mathbf{u} \in E, \forall \mu \in \mathbb{K}, \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \mu \cdot (\lambda \cdot \mathbf{u}) = (\lambda \mu) \cdot \mathbf{u}$$

- 6.

$$\forall \mathbf{u} \in E, \forall \mu \in \mathbb{K}, \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad (\mu + \lambda) \cdot \mathbf{u} = (\lambda \cdot \mathbf{u}) + (\mu \cdot \mathbf{u})$$

- 7.

$$\forall \mathbf{u} \in E, \forall \mathbf{v} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\lambda \cdot \mathbf{u}) + (\lambda \cdot \mathbf{v})$$

Par convention on décide que "." est prioritaire sur l'addition.

Attention : La notation \mathbf{u} ne sera utilisée qu'en début de cours. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera x . Lorsque l'on adoptera un point de vue géométrique, on pourra trouver la notation \vec{x} .

Vocabulaire et notation. Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K}

- Un élément de \mathbb{K} est un **scalaire**.
- Un élément de E est un **vecteur**.
- \mathbb{K} est le **corps de base**.
- E est un **\mathbb{K} -espace vectoriel**.

Proposition 1 (Premières propriétés).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

- Pour tout vecteur \mathbf{u} de E il existe un unique vecteur \mathbf{v} de E tel que $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}_E$. Ce vecteur \mathbf{v} est le **symétrique** ou l'**opposé** de \mathbf{u} pour l'addition, il est noté $-\mathbf{u}$.
- Pour tout vecteur $\mathbf{u} \in E$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ on a $\lambda \cdot \mathbf{0}_E = \mathbf{0}_E$ et $0_{\mathbb{K}} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}_E$.
- Pour tout vecteur $\mathbf{u} \in E$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ on a

$$\lambda \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}_E \text{ si et seulement si } \lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } \mathbf{u} = \mathbf{0}_E$$

- Pour tout vecteur $\mathbf{u} \in E$ on a $-\mathbf{u} = (-1) \cdot \mathbf{u}$.

Démonstration :

9

Définition 3 (Combinaisons linéaires).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel

- Une **combinaison linéaire** est un élément de E de la forme $\lambda \cdot \mathbf{u} + \mu \cdot \mathbf{v}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mu \in \mathbb{K}$, $\mathbf{u} \in E$ et $\mathbf{v} \in E$.
- Plus généralement une **combinaison linéaire** est un élément de E de la forme

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \mathbf{u}_i$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, et pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et $\mathbf{u}_i \in E$.

I.2 Exemples fondamentaux

Théorème 1 (Les espaces vectoriels de référence).

- \mathbb{K}^n est un \mathbb{K} -espace vectoriel.
- $\mathbb{K}[X]$, l'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients dans \mathbb{K} , est un espace vectoriel sur \mathbb{K} .
- L'ensemble \mathbb{R}^I des applications de I vers \mathbb{R} , où I est un intervalle, est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
- L'ensemble de matrices $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel (n et p sont fixés).

Dans chaque cas on munit ces ensembles des opérations « naturelles ».

Démonstration :

9

I.3 Sous-espaces vectoriels

Définition 4 (Sous-espaces vectoriels).

Soit E un \mathbb{K} -ev et $F \subset E$. On dit que F est un sous-espace vectoriel si et seulement si

- $0_E \in F$
- $\forall \mathbf{u} \in A, \forall \mathbf{v} \in A$ on a $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in A$.
- $\forall \mathbf{u} \in A, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ on a $\lambda \cdot \mathbf{u} \in A$.

Proposition 2 (Caractérisation d'un sous-espace vectoriel).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $F \subset E$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. F est un sous-espace vectoriel
2. $0_E \in F$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \mu \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{u} \in F, \forall \mathbf{v} \in F$ on a $\lambda \cdot \mathbf{u} + \mu \cdot \mathbf{v} \in F$
3. $0_E \in F$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K} \forall \mathbf{u} \in F, \forall \mathbf{v} \in F$ on a $\lambda \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \in F$

Il est très facile de trouver des sous ensembles qui ne sont pas des sous-espaces vectoriels

Ce théorème est très souvent utilisé pour démontrer qu'un ensemble est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Théorème 2.

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} et A un sous-espace vectoriel de E alors A est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Démonstration :

Il "suffit" de vérifier les 8 points de la définition de \mathbb{K} -espace vectoriel.

9

Exemple :

- $\{(x, y) \in \mathbb{K}^2 / x + y = 0\}$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel
- $\mathbb{K}_n[X]$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.
- Ensemble des fonctions définies sur \mathbb{R} ayant une limite en $+\infty$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
- L'ensemble des fonctions définies sur \mathbb{R} convergeant vers 0 en $+\infty$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
- Ensemble des fonctions à valeurs réelles dérivables sur un intervalle est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Méthode : montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel

Lorsque l'on étudie un sous ensemble A d'un ensemble de référence $(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}_n[X], \text{ensemble des matrices } n \times p)$ dont l'on sait qu'il est un espace vectoriel et que l'on vous demande de démontrer que A est un espace vectoriel,

1. On montre que $0 \in A$
2. On montre que A est stable par combinaisons linéaires (cf définition 4 ou proposition 2).
3. On en conclut que A est un sous-espace vectoriel.
4. On en déduit que A est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Méthode : Montrer que F n'est pas un sous-espace vectoriel

Pour montrer que $F \subset E$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E on peut **au choix**

- Montrer que 0_E n'est pas dans F .
- Trouver deux vecteurs u et v qui sont dans F mais dont la somme n'est pas dans F .
- Trouver un vecteur x qui est dans F et un scalaire λ tel que λx n'est pas dans F

Dans chaque cas on munit ces ensembles des opérations naturelles.

I.4 Opérations sur les espaces vectoriels

Théorème 3 (Ensemble des applications à valeur dans un \mathbb{K} -espace vectoriel).

Soit E un espace-vectoriel sur \mathbb{K} et A un ensemble alors l'ensemble des applications de A dans E notée E^A ou $\mathcal{A}(A, E)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Proposition 3 (Intersection de sous-espaces vectoriels).

Soit E un \mathbb{K} -ev.

- Soit A et B deux sous-espaces vectoriels de E .
Alors $A \cap B$ est un sous-espace-vectoriel de E .
- Soit $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E .

Alors $\bigcap_{i=1}^n A_i$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration :

Attention : Pour l'union le résultat n'est pas vrai en général, cf feuille de TD

II Familles de vecteurs

II.1 Bases

Définition 5 (Base, unicité de la décompositions).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille de vecteurs de E . On dit que cette famille est **une base** de E si et seulement si pour tout vecteur x de E il existe une unique famille de scalaire $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ telle que

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$$

Les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les **coordonnées** de \mathbf{x} dans la base.

Exemple :

Méthode pour vérifier qu'une famille donnée est une base d'un espace vectoriel E

Si on vous demande de prouver que $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ est une base d'un espace vectoriel E .

- On commence par choisir des notations adaptées.
- On commence la réponse obligatoirement par « Soit $\square \in E$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des scalaires » en introduisant autant de scalaires qu'il y a de vecteurs dans la famille.
- On écrit « résolvons l'équation $\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{u}_n = \square$
- On résout cette équation en sachant que \square est un paramètre et que les inconnues sont les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
- On raisonne avec des \Leftrightarrow ou des si et seulement si car on résout une équation. **Très souvent l'équation doit être transformée en un système en première étape.**
- Si un problème apparaît (une infinité de solution ou pas de solution dans certains cas) on peut conclure "la famille n'est pas une base de E "
- Si on arrive à résoudre le système et qu'il n'y a qu'une solution pour chaque $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ alors on peut conclure « la famille est une base de E » (et éventuellement « les coordonnées de \square dans cette base sont $\lambda_1 = \dots, \lambda_2 = \dots, \dots, \lambda_n = \dots$ »)
- Selon l'énoncé on peut éventuellement se contenter de montrer que le système admet une unique solution par exemple « système échelonné à coefficient diagonaux non nuls. »

Définition 6 (Bases canoniques de certains \mathbb{K} -espace vectoriel).

- La famille $(\mathbf{e}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ où pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ le vecteur \mathbf{e}_i est le n -uplet dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la i -ème qui vaut 1, est une base de \mathbb{K}^n dite **base canonique** de \mathbb{K}^n .
- La famille $(X^i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ dite **base canonique**¹ de $\mathbb{K}_n[X]$.
- On note $(E_{i,j})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, p \rrbracket}}$ où $E_{i,j}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en ligne i et en colonne j qui vaut 1. Cette famille est la **base canonique** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Démonstration :

Il "suffit" de vérifier que les familles citées sont bien des espaces vectoriels concernés

1. La famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ dite **base canonique** de $\mathbb{K}[X]$.

II.2 Sous-espace vectoriel engendré par une famille

Définition 7 (La notation Vect).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $(\mathbf{u}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille de vecteurs de E

On note

$$\text{Vect}\left((\mathbf{u}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}\right) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{u}_i \text{ où } (\lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \text{ est une famille de scalaire} \right\}$$

Alors $\text{Vect}\left((\mathbf{u}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}\right)$ est un sous-espace vectoriel de E . On le désigne par le nom de **(sous)-espace vectoriel engendré** par la famille $(\mathbf{u}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.

Exemple :

- Dans \mathbb{R}^3 , $\text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0)) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$.
- Dans $\mathbb{K}[X]$, $\text{Vect}((X^{2n})_{n \in \mathbb{N}}) = \{P(X^2) / P \in \mathbb{K}[X]\}$.

Remarque : l'espace vectoriel engendré par une famille n'est pas modifié si on « permute » les éléments de la famille.

II.3 Familles libres, familles génératrices et bases.

Définition 8 (Famille libre, génératrice).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $(\mathbf{e}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille de vecteurs de E

- On dit que $(\mathbf{e}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une **famille génératrice** de E si et seulement si

$$\text{Vect}\left((\mathbf{e}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}\right) = E$$

- On dit que $(\mathbf{e}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une **famille libre** si et seulement si pour toute famille de scalaire $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.

$$\sum_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \lambda_i \cdot \mathbf{e}_i = 0 \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \lambda_i = 0$$

Proposition 4 (Caractérisation d'une base).

$(\mathbf{e}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une **base** de E si et seulement si c'est une famille génératrice de E et libre.

Proposition 5 (Opérations sur les familles).

On pourra utiliser les résultats suivants pour accélérer les démonstrations

1. Permuter les vecteurs ne change pas les propriétés (génératrice, libre) d'une famille.
2. Une sous-famille d'une famille libre est libre
3. Une sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.
4. Si une famille contient le vecteur nul ou deux fois le même vecteurs elle est liée

Proposition 6 (Opérations sur les familles génératrices).

Si $\mathcal{G} = (\mathbf{e}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une famille génératrice de E , alors les opérations suivantes ne changent pas ce caractère générateur :

- Enlever un vecteur de la famille qui est combinaison des autres vecteurs, cela s'applique toujours au vecteur nul que l'on peut enlever.
- Ajouter à l'un des vecteurs une combinaison linéaire des autres.
- Multiplier un vecteur par un scalaire **non nul**.

Remarque : On peut voir que ces opérations sont analogues aux opérations autorisées lors de la méthode de résolution d'un système linéaires

Proposition 7 (Petites familles).

Soit \mathbf{u} et \mathbf{v} deux vecteurs d'un espace vectoriel E .

1. (\mathbf{u}) est libre si et seulement si \mathbf{u} est non nul.
2. (\mathbf{u}, \mathbf{v}) est libre si et seulement si les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, c'est à dire si aucun des vecteurs n'est proportionnel à l'autre.

Proposition 8 (Famille de polynômes).

Soit (P_1, \dots, P_r) une famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ dont les degrés sont distincts deux à deux. Alors cette famille est libre

Proposition 9 (Familles liées).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $(\mathbf{u}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille de vecteurs de E .

Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- $(\mathbf{u}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est non libre. (On dit que cette famille est **liée**).
- Il existe $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que vecteur \mathbf{x}_{i_0} peut s'exprimer comme une combinaison linéaire finie d'autres vecteurs de la famille $(\mathbf{u}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.
- Il existe $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\mathbf{x}_{i_0} \in \text{Vect}((\mathbf{x}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i_0\}})$

ceci prolonge la notion de deux vecteurs colinéaires



Attention : Cette proposition affirme que dans une famille liée **au moins un** des vecteurs de la famille peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres. Cela ne veut absolument pas dire que tous les vecteurs de la famille s'exprime comme une combinaison linéaires des autres.

Exercice : Montrer que $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 0)$ forment une famille liée de \mathbb{C}^3 .

Théorème 4 (Caractérisation d'une base (limite programme)).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $(\mathbf{e}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille de vecteurs de E . Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $(\mathbf{e}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une base.
2. $(\mathbf{e}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est génératrice et si on enlève un vecteur quelconque de la famille celle ci n'est plus génératrice. i.e.

$$\forall i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad (\mathbf{e}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i_0\}} \text{ n'est pas génératrice}$$

3. $(\mathbf{e}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est libre et pour tout vecteur \mathbf{u} la famille $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{u})$ n'est plus libre

II.4 Méthodes

Attention : Avant d'appliquer chacune des méthodes suivantes, on pourra commencer par simplifier les familles étudiées grâce aux propositions 5 et 6 et 7. De plus d'autres arguments de dimension nous permettrons d'aller plus rapidement par la suite **III.4**



Méthode pour montrer que F est un (sous)-espace vectoriel d'un espace vectoriel E et/ ou trouver une famille génératrice de F

Si F est donné par une formule de la forme

$$F = \{ \text{« une expression qui dépend de } a, b, \dots \text{»} / a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \dots \}$$

et que l'on vous demande de montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et/ou de trouver une famille génératrice de F

Il faut "séparer" les paramètres a, b, \dots pour écrire

$$F = \{ a\Box + b\nabla + \dots / a, b \text{ réels} \} = \text{Vect} \left(\underbrace{\Box, \nabla, \dots}_{\text{il n'y a plus ni de } a, \text{ ni de } b \text{ ni} \dots} \right)$$

On peut alors conclure que :

- F est un sous-espace vectoriel de E
- la famille \Box, ∇, \dots est une famille génératrice de F

Cette méthode peut être suivie d'une autre méthode pour trouver une base voir page 10

Méthode pour trouver le sous-espace vectoriel engendré par une famille

Si on vous demande de calculer $\text{Vect}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ où $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ sont des vecteurs donnés d'un espace vectoriel E .

- On commence par choisir les notations adaptées à l'espace vectoriel.
- On commence obligatoirement la réponse par « Soient \Box dans E , et $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ des réels cherchons à résoudre l'équation

$$\Box = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{u}_n$$

»

- on résout cette équation avec des \Leftrightarrow ou des si et seulement si. Les inconnues sont les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. et \Box un paramètre. Cette équation est souvent transformée en un système d'équations.
- Lors de la résolution de cette équation le but n'est pas temps de trouver les solutions pour $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mais de faire apparaître une ou des conditions de compatibilité qui conditionne l'existence de solutions.
- On conclut

$$\text{Vect}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) = \{ \Box \in E / \Box \text{ vérifie la condition trouvée} \}$$

- on enchaîne souvent par la méthode de la page 9 pour trouver une famille génératrice de ce sous-espace vectoriel et par la méthode de la page 10 pour en trouver une base.

Méthode pour montrer qu'une famille donnée est libre

Si on vous demande de prouver que $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ est une famille libre d'un espace vectoriel E .

- On commence par choisir des notations adaptées.
- On commence la réponse obligatoirement par « Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des réels » en introduisant autant de réels qu'il y a de vecteurs dans la famille.
- On écrit « résolvons l'équation $\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{u}_n = 0$
- on résout cette équation en sachant que λ est un paramètre et que les inconnues sont les $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
- On raisonne avec des \Leftrightarrow ou des si et seulement si car on résout une équation. Très souvent l'équation doit être transformée en un système en première étape.
- Si on arrive à résoudre le système et que l'unique solution pour chaque variable est $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_n = 0$ alors on peut conclure « la famille est libre »
- si on trouve d'autres solutions que la solution nulle on peut conclure « la famille est liée ».

Méthode pour montrer qu'une famille donnée est liée

Si l'on vous demande de montrer qu'une famille est liée

- **À essayer en premier** On peut deviner une combinaison linéaire « évidente » entre les vecteurs donnés.
- Si on ne trouve aucune combinaison linéaire évidente on utilise la méthode générique précédente.

Méthode pour montrer qu'une famille donnée est une base de E .

Si l'on a déjà démontré qu'une famille est libre et génératrice de E il suffit d'indiquer que c'est une base de E

Méthode pour trouver une base de E .

On cherche une famille génératrice avec la méthode « pour trouver une famille génératrice d'un espace vectoriel E » e la page 9 et l'on vérifie que la famille trouvée est libre avec la méthode « Méthode pour montrer qu'une famille donnée est libre » de la page 10.

Famille de fonctions

Lorsque l'on étudie la liberté d'une famille de fonction f_1, f_2, \dots, f_n , on doit étudier des équations du type

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0$$

Pour cela on peut au choix

- Spécifier l'équation précédente en remplaçant la variable par des valeurs bien choisies x_1, x_2, \dots, x_n pour obtenir un système de n équations. Cela donne une condition nécessaire sur les coefficients.
- Étudier la limite en un point bien choisi en utilisant les théorèmes de comparaisons, on doit souvent faire une récurrence .
- Se ramener à une famille de polynôme à l'aide théorème d'identification sur les polynômes.

III Espaces vectoriels de dimension finie

III.1 Définition et exemples

Définition 9 (Espace vectoriel de dimension finie).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On dit que E est **de dimension finie** si et seulement si il existe une famille génératrice finie de E

III.2 Le théorème de la dimension finie

Théorème 5 (et définition).

Si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)$ est une base de E et si $(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m)$ est une base de E alors

$$m = p$$

i.e. Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont le même cardinal.

On dit alors que **la dimension** de E est cet entier m , il est noté $\text{Dim } E$. Par convention

$$\text{Dim } \{0\} = 0$$

Démonstration :


Admis

9

Proposition 10 (Exemples fondamentaux 1).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\text{Dim } \mathbb{K}^n = n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\text{Dim } \mathbb{K}_n[X] = n + 1$.

 source d'erreurs classiques

Démonstration :

Il suffit d'étudier les bases canoniques

9

III.3 Le théorème de la base incomplète.

Proposition 11 (Base extraite).

Soit E un \mathbb{K} ev de dimension n . Soit $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_r)$ une famille génératrice.

Alors

il existe i_1, \dots, i_n des entiers de $\llbracket 1, r \rrbracket$ tels que

$$\mathbf{f}_{i_1}, \dots, \mathbf{f}_{i_n} \text{ forment une base de } E.$$

Autrement dit : On peut extraire une base de toute famille génératrice.

Théorème 6 (Le théorème de la base incomplète).

Soit E un \mathbb{K} ev de dimension n .

Soit $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_p)$ une famille libre et $(\mathbf{f}_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille génératrice.

Alors

il existe $\mathbf{f}_{i_1}, \dots, \mathbf{f}_{i_{n-p}}$ des vecteurs tels que

$(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{n-p})$ soit une base de E

Exemple : 1 :

dans \mathbb{R}^3 on choisit $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ comme famille libre et $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ comme famille génératrice.

Exemple : 2 :

dans $\mathbb{R}_3[X]$ on choisit $1, X$ comme famille libre et comme famille génératrice $X(X-1)(X-2), X(X-1)(X-3), X(X-2)(X-3), (X-1)(X-2)(X-3)$

On utilise souvent ce théorème avec E comme famille génératrice

Plus précisément la famille génératrice utilisée est $(\mathbf{u})_{\mathbf{u} \in E}$

Corollaire 1 (Existence de base).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle.

Alors il existe une base de E

Démonstration :

Par hypothèses il existe une famille génératrice (finie) \mathcal{G} de E et un vecteur \mathbf{u}_0 non nul.

On applique le théorème de la base incomplète à la famille libre \mathbf{u}_0 et à la famille génératrice \mathcal{G}

56

III.4 Caractérisation des bases en dimension finie

lemme 1 (Cardinal d'une famille génératrice d'une famille libre).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et soit $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)$ une famille.

Alors

- Si $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)$ est libre alors $p \leq n$
- Si $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)$ est génératrice alors $p \geq n$

Théorème 7 (Argument de dimension pour une base).

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et soit $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)$ une famille de vecteurs.

Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes.

- $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)$ est une base de E
- $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)$ est une famille génératrice de E et $n = p$
- $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)$ est une famille libre et $n = p$

Méthode pour montrer qu'une famille est une base.

Si on étudie un espace-vectoriel E **dont on connaît la dimension** Pour montrer que la famille (e_1, e_2, \dots, e_n) est une base de E , il suffit de

- Montrer que la famille est libre et que le cardinal de la famille est égal à la dimension de E .
- **Ou bien** Montrer que la famille est génératrice et que le cardinal de la famille est égal à la dimension de E .

III.5 Sous espaces vectoriels et rang

Proposition 12 (Sous espace vectoriel en dimension finie).

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie et $A \subset E$ un sous espace vectoriel.

Alors : A est de dimension finie et $\dim A \leq \dim E$

De plus $\dim A = \dim E$ si et seulement si $A = E$

Démonstration :

On utilise le théorème de la base incomplète

9

Exemple : dans $\mathbb{R}_2[X]$ calculer la dimension de $A = \text{Vect}(X^2 + 1, X^2 + 2, X^2 + X)$.

Définition 10 (Rang d'une famille de vecteurs.).

Soit E un \mathbb{K} de dimension finie n , soit $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$ une famille alors on appelle **le rang** de $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$ la dimension du sous espace vectoriel

$$\text{Vect}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$$

Cet entier naturel est noté $\text{rg}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$, on a donc

$$\text{rg}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p) = \dim \text{Vect}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$$

Exemple : Dans $\mathbb{R}_3[X]$ on considère la famille $(1, X^2, 1 + X)$. Calculer son rang.

Proposition 13 (Propriétés du rang).

Soit E un \mathbb{K} espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{F} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$ une famille alors

1.

$$\text{rg}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p) \leq p$$

Il y a égalité si et seulement si la famille est libre.

2.

$$\text{rg}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p) \leq \dim(E)$$

Il y a égalité si et seulement si la famille est génératrice.

IV Représentation matricielle

Remarque préliminaire : produit d'une matrice par une colonne

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \text{ alors on constate que}$$

$$x \begin{pmatrix} a \\ a' \\ a'' \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ b' \\ b'' \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} c \\ c' \\ c'' \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} d \\ d' \\ d'' \end{pmatrix} = AX$$

Exercice 1.

Trouver une matrice A telle que pour tout x, y et z réels

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

IV.1 Matrices colonnes des coordonnées

Si on connaît une base $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ de E , alors tout vecteur est entièrement connu si on connaît ses n coordonnées (x_1, \dots, x_n) . Plutôt que de présenter les coordonnées sous forme d'une liste, on va voir qu'il est plus pratique de les manipuler sous la forme d'une matrice colonne, c'est ce que l'on nomme ...

Définition 11 (Matrice colonne des coordonnées dans une base).

Soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base de E . Pour tout vecteur $\mathbf{x} \in E$ de coordonnées (x_1, x_2, \dots, x_n) dans la base \mathcal{B} la matrice colonne des coordonnées de \mathbf{x} , notée $X_{\mathcal{B}}$ est

$$X_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Exemple :

- Soit \mathbb{R}^3 munit de la base canonique et $\mathbf{x} = (1, 2, 3)$ alors la matrice des coordonnées de x dans la base est

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et \mathcal{B} sa base canonique et $P = 2 - X + X^3$, alors la matrice des coordonnées est

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ munit de la base canonique $E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}$ alors la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors sa représentation est

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Définition 12 (Matrice des coordonnées d'une famille).

La matrice des coordonnées d'une famille $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_p)$ de vecteurs dans une base \mathcal{B} est la matrice à p colonne dont la colonne est formée des coordonnées de \mathbf{f}_i

Proposition 14 (Rang d'une famille et d'une matrice).

Le rang de la famille est égale au rang de la matrice de ses coordonnées. Ce théorème permet d'utiliser les méthodes du pivot pour calculer le rang d'une famille.

Matrice de passage et calcul des coordonnées d'un vecteur.

Soient $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$, $\mathcal{B}' = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ deux bases d'un espace vectoriel E et \mathbf{v} un vecteur de E .
On appelle **matrice de passage** :

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \dots & \mathbf{f}_n \\ * & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{matrix}$$

la matrice $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est formée du vecteur colonne des coordonnées \mathbf{f}_j exprimées dans la base \mathcal{B} ,
Cette matrice $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ permet de calculer les coordonnées dans \mathcal{B} en fonction des coordonnées dans \mathcal{B}' :
Si on note X la matrice des coordonnées d'un vecteur \mathbf{u} dans \mathcal{B} et X' celle dans \mathcal{B}' alors

$$X = P X'$$



Attention : $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ est une notation générale, dans les sujets cette notation est rarement utilisée, on introduit cette matrice à l'aide d'une phrase.

Théorème 8 (Inverse d'une matrice de passage).

Soient $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$, $\mathcal{B}' = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ deux bases d'un espace vectoriel E et \mathbf{v} un vecteur de E .

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \dots & \mathbf{f}_n \\ * & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{matrix}$$

La matrice P est inversible et son inverse P^{-1} est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs \mathbf{e}_j exprimées dans la base \mathcal{B}' :

$$P^{-1} = \begin{matrix} & \mathbf{e}_1 & \dots & \mathbf{e}_n \\ \left(\begin{array}{c} \\ \\ * \\ \end{array} \right) & \mathbf{f}_1 \\ & \vdots \\ & \mathbf{f}_n \end{matrix}$$

Ce qui permet de calculer les coordonnées dans la base \mathcal{B}' en fonction des coordonnées dans la base \mathcal{B} .

$$P^{-1}X = X'$$

Remarque : On peut noter :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$$