

## ESPACES VECTORIELS

Dans tout ce TD la lettre  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$

### Sous-espaces vectoriels

#### Exercice 1.

Déterminer si les ensembles suivants sont des sous espaces vectoriels? de  $\mathbb{R}^2$ .

1.  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x + y - z = x + 2y + 3z = 0\}$
2.  $B = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } x + y - z + 3t = 1\}$
3.  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x + y^2 - z = 0\}$
4.  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x + y - z = 0\}$

#### Exercice 2.

Les ensembles suivants sont ils des sous espaces vectoriels de  $\mathbb{K}[X]$ ?

1.  $A = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P(1) = 0\}$
2.  $B = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P(1) = 3\}$
3.  $C = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P' = 0\}$
4.  $D = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P(1) = P(0)\}$
5.  $E = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P(1) \leq P(0)\}$
6.  $F = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P \text{ admet } 1 \text{ comme racine double}\}$
7.  $G = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P \text{ admet une racine double}\}$

#### Exercice 3.

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  (avec les bonnes conditions). Les ensembles suivants sont ils des sous espaces vectoriels?

1.  $A = \{f \in \mathbb{R}^I \text{ tel que } f(1) = 0\}$
2.  $B = \{f \in \mathbb{R}^I \text{ tel que } f \text{ est continue et } \int_0^1 f(t) dt = 0\}$
3.  $C = \{f \in \mathbb{R}^I \text{ tel que } \lim_0 f = 0\}$

#### Exercice 4 (ensembles de matrices).

Les ensembles suivants sont ils des sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ?

1.  $\mathcal{E}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle/ a = d = 0 \right\}$
2.  $\mathcal{E}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle/ a = d \right\}$
3.  $\mathcal{E}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle/ a + b + c + d = 0 \right\}$
4.  $\mathcal{E}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle/ a^2 + b^2 = 0 \right\}$
5.  $\mathcal{E}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle/ a = 1 \right\}$

#### Exercice 5 (ensembles de matrices).

Les ensembles suivants sont ils des sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ ?

1.  $\mathcal{E}_1 = \{M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \middle/ M^T = M\}$
2.  $\mathcal{E}_2 = \{M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \middle/ M^T = -M\}$
3.  $\mathcal{E}_3 = \{M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \middle/ M^2 = 0\}$
4.  $A$  est une matrice carrée d'ordre  $n$  **fixée**,  $\mathcal{E}_4 = \{M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \middle/ AM = 0\}$
5.  $\mathcal{E}_5 = \{M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \middle/ \text{La somme des coefficients diagonaux de } M \text{ vaut } 0\}$

#### Exercice 6 (▲).

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev.

1. Montrer à l'aide d'un contre exemple que si  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ ,  $F \cup G$  n'est pas forcément un sous espace vectoriel.  
On cherche maintenant une condition nécessaire et suffisante sur  $F$  et  $G$  pour que  $F \cup G$  soit un sous-espace vectoriel de  $E$
2. Condition?????  
Montrer que si  $F \cup G$  est un sous espace vectoriel alors :

$$F \subset G \quad \text{ou} \quad G \subset F$$

*Indication : raisonnement par contraposée*

3. Conclure

#### Exercice 7.

Les ensembles suivants sont ils des sous espace vectoriels de  $\mathbb{C}$ ?

1.  $i\mathbb{R}$
2.  $\{z \in \mathbb{C} \mid z = \bar{z}\}$
3.  $\{z \in \mathbb{C} \mid z^2 \in \mathbb{R}\}$

## Familles libres, familles génératrices

### Exercice 8.

On pose  $E = \mathbb{R}^3$  Soit

$$\mathcal{B}_1 = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$$

,

$$\mathcal{B}_2 = ((1, 2, 1), (1, -1, 1), (2, 1, -1))$$

Montrer que  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  forment des bases de  $\mathbb{R}^3$  et pour tout vecteur  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  calculer les coordonnées de  $(x, y, z)$  dans chacune des bases.

### Exercice 9 (Familles de polynômes).

Soit  $E = \mathbb{R}_2[X]$ , les familles suivantes sont elles des bases de  $E$

1.  $P_1 = 1, P_2 = 1 + X, P_3 = 1 + X + X^2$
2.  $P_1 = X(X-1), P_2 = X(X+1), P_3 = X^2 - 1$
3.  $P_1 = 1 + X, P_2 = 1 + X^2$
4.  $P_1 = 1 + X, P_2 = X + X^2, P_3 = 1$  et  $P_4 = X^2 - 1$

### Exercice 10 (Familles de polynômes).

Soit  $E = \mathbb{R}_3[X]$ , les familles suivantes sont elles des bases de  $E$

1.  $P_1 = 1, P_2 = 1 + X, P_3 = 1 + X + X^2, P_4 = 1 + X + X^2 + X^3$
2.  $P_1 = 1 + X, P_2 = X + X^2, P_3 = X^2 + X^3, P_4 = X^3$
3.  $P_1 = (X-1)(X-2)(X-3), P_2 = (X)(X-2)(X-3), P_3 = X(X-1)(X-3), P_4 = X(X-1)(X-2)$
4.  $P_1 = X, P_2 = X^2 + 1, P_3 = 1 + X + X^3$

### Exercice 11 (Familles de matrices).

Les familles suivantes forment elles des bases de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

1.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
2.  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
3.  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$
4.  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

### Exercice 12.

On note  $F = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid M^T = M \right\}$  et  $G = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid M^T = -M \right\}$

1. Montrer que  $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$
2. Montrer que  $G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$
3. Trouver une base de  $F$  et une base de  $G$
4. Montrer que pour toute matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  il existe une unique matrice  $M_F \in F$  et une unique matrice  $M_G \in G$  telles que  $M = M_F + M_G$ .

### Exercice 13 (▲ Généralisation de 12).

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \quad \mathcal{S}_n = \left\{ M \in \mathcal{E}_n \mid M^T = M \right\} \quad \mathcal{A}_n = \left\{ M \in \mathcal{E}_n \mid M^T = -M \right\}$$

1. Montrer que  $\mathcal{A}_n$  et  $\mathcal{S}_n$  sont des sous-espace vectoriel de  $\mathcal{E}_n$
2. Trouver une matrice  $A$  telle que  $A \notin \mathcal{A}_n \cup \mathcal{S}_n$
3. Montrer que pour toute matrice  $M$  de  $\mathcal{E}_n$  il existe une unique matrice  $S \in \mathcal{S}_n$  et une unique matrice  $A \in \mathcal{A}_n$  telles que  $M = A + S$ . On pourra raisonner par analyse-synthèse

### Exercice 14.

Soit  $x_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$ ,  $x_2 = (1, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$  ...  $x_n = (1, 1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{K}^n$ . Étudier la famille  $(x_1, \dots, x_n)$ .

### Exercice 15.

Soit  $P_1, P_2, \dots, P_n$  une famille de  $n$  polynômes à une indéterminée à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . On suppose que les degrés des  $P_i$  sont strictement croissants et  $P_1 \neq 0$ .

1. Montrer que la famille est libre.
2. Est-elle forcément génératrice?
3. Trouver une famille de polynômes (avec plus d'un polynôme) dont tous les éléments sont de même degré et qui soit libre (on se placera dans  $\mathbb{K}_2[X]$ )

### Exercice 16.

Soit  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  une famille d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . On note

$$f_1 = e_1 \quad f_2 = e_2 + e_1 \quad f_3 = e_3 + e_1 \quad f_4 = e_4 + e_1$$

1. On suppose que  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  est libre, montrer que  $(f_1, f_2, f_3, f_4)$  est libre.
2. On suppose que  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  est génératrice de  $E$ , montrer que  $(f_1, f_2, f_3, f_4)$  est génératrice de  $E$

**Exercice 17.**

En s'inspirant des procédés vus en classe.

1. On pose  $e_1 = (1, 1, 0, 0)$  et  $e_2 = (-1, 1, -1, 1)$  compléter  $e_1, e_2$  en une base de  $\mathbb{R}^4$
2. On pose  $e_1 = (1, 1), e_2 = (-1, 1), e_3 = (1, 0), e_4 = (1, 2)$  réduire  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  en une base de  $\mathbb{R}^2$

**Exercice 18.**

On note  $E$  l'espace vectoriel des application continues sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

1. la famille  $(\cos, \sin)$  est elle libre? Est elle une famille génératrice de  $E$ ?
2. Montrer que la famille  $\left(x \mapsto e^{kx}\right)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  est libre (pensez au théorème des croisances comparées ou au principe d'identification). Est ce une famille génératrice de  $E$ ?

**Exercice 19** ( $\blacktriangle$ ). 1. Pour  $p$  et  $q$  deux entiers naturels calculer

$$I_{p,q} = \int_0^\pi \cos(px) \cos(qx) dx$$

2. Montrer que pour  $n$  un entier naturel non nul la famille  $(x \mapsto \cos(x), x \mapsto \cos(2x), \dots, x \mapsto \cos(nx))$  est libre (faire une récurrence). Est ce une famille génératrice de  $E$ ?

**Exercice 20** ( $\blacktriangle$ ).

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ , on note

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{K}^n &\rightarrow E \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) &\mapsto \lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_n \cdot x_n \end{aligned}$$

1. Montrer que  $\varphi$  est injective si et seulement si  $\mathcal{F}$  est libre/génératrice (rayer la mention inutile).
2. Montrer que  $\varphi$  est surjective si et seulement si  $\mathcal{F}$  est libre/génératrice (rayer la mention inutile).
3. Trouver une CNS pour que  $\mathcal{F}$  soit une base

**Exercice 21.**

Calculer la dimension de  $A$ .

1.  $E = \mathbb{R}^3, A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$ .
2.  $E = \mathbb{R}^3, A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = x + 2y = 0\}$
3.  $E = \mathbb{C}_3[X], A = \{P \in \mathbb{C}_3[X] / P' = 0\}$
4.  $E = \mathbb{R}_4[X], A = \{P \in \mathbb{R}_4[X] / P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$

**Exercice 22.**

Calculer le rang des familles suivantes, en déduire leurs caractéristiques.

1. dans  $\mathbb{R}^3$   $e_1 = (1, 1, 1), e_2 = (1, 1, 2), e_3 = (2, 1, 1), e_4 = (1, 2, 1)$
2. dans  $\mathbb{C}^4$   $e_1 = (1, 1, 0, 0), e_2 = (1, 0, 1, 0), e_3 = (1, -1, 1, -1), e_4 = (1, 1, 1, 1)$
3. dans  $\mathbb{R}_3[X]$   $X, X^2 - X, X^3 - X^2, X^3 - X$

**Exercice 23.**

Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$  on note  $\mathcal{H}_\alpha$  la famille

$$\mathcal{H}_\alpha = ((1, -1, 0, 2), (1, 0, 1, 2), (1, 3, 5, 7), (0, 2, 3, \alpha))$$

calculer en fonction de  $\alpha$  le rang de  $\mathcal{H}_\alpha$

**Exercice 24** ( $\blacktriangle, \blacktriangle$ ).

Soit  $A$  et  $B$  deux sev de  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie. Montrer que  $A \cap B$  est de dimension finie et majorer  $\dim A \cap B$

**Exercice 25.**

Soit  $F$  l'ensemble des matrices  $2 \times 2$  vérifiant

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle/ b + c + d = 0 \right\}$$

1. Montrer que  $F$  est un sous espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
2. Trouver une base de  $F$
3. Même question avec  $F' = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle/ a + d = b + c \right\}$

**Exercice 26.**

Soit  $E = \mathbb{R}_4[X]$  et  $a, b$  deux réels distincts. On désigne par  $F$  l'ensemble des polynômes de  $E$  dont  $a$  et  $b$  sont racines. Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . En donner une base.

**Exercice 27.**

Soit  $E$  l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  et  $F = \{f \in E / f'' = 2f' - f\}$

1. Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$
2. Montrer que  $F \neq E$ .
3. Soient les fonctions définies pour  $x$  réel par

$$f_1(x) = e^x \quad f_2(x) = xe^x$$

Montrer que  $f_1, f_2$  forment une famille libre de  $F$ .

## Matrices : calculs

### Exercice 28.

Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des réels non nuls. Calculer l'inverse de la matrice diagonale.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

### Exercice 29.

Montrer que  $\forall n \geq 0, A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$  où  $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ .

### Exercice 30.

Montrer que  $\forall n \geq 1, J^n = 6^{n-1} J$  où  $J = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

### Exercice 31.

Soit  $A$  la matrice  $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $A = B + 2I$

Calculer  $B^2$  puis, à l'aide de la formule du binôme de Newton, calculer  $A^n$ .

### Exercice 32.

Pour chacune des matrices suivantes, exprimer  $A$  sous la forme  $I + B$  puis calculer  $A^n$  en utilisant la formule du binôme :

1.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4.  $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

### Exercice 33.

On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que l'inverse de  $P$  est

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. Déterminer la matrice  $D$  telle que  $A = PDP^{-1}$ .

3. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$  et expliciter  $A^n$ .

### Exercice 34.

On considère la matrice  $A$  suivante :  $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Calculer  $A^2, A^3$  et montrer que :  $A^3 = 6A - A^2$

2. Prouver que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , il existe des réels  $a_n$  et  $b_n$  tels que :  $A^n = a_n A^2 + b_n A$   
Donner  $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ .

3. Montrer que  $a$  est une suite récurrente d'ordre 2 puis expliciter  $a_n$  en fonction de  $n$ .

4. En déduire l'expression de  $b_n$  et déterminer tous les coefficients de la matrice  $A^n$

### Exercice 35.

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  calculer  $A^2 - 3A + 4I_2$  puis  $A^{-1}$ .

### Exercice 36.

Calculer l'inverse des matrices suivantes.

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. dans  $\mathbb{R}_3[X]$  de la base canonique à  $(1, 1 + X, 1 + X^2, 1 + X^3)$
2. dans  $\mathbb{R}_2[X]$  de la base  $(1, 1 + X, 1 + X^2)$  à la base  $(X(X - 1), X(X + 1), (X + 1)(X - 1))$ .
3. Dans  $\mathbb{R}^3$  de  $((1, 2, 1), (1, 0, 1), (0, 2, 2))$  à  $((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$
4. dans  $E$  de  $(e_1, \dots, e_n)$  à  $(e_n, e_{n-1}, \dots, e_1)$
5. dans  $E$  de  $(e_1, \dots, e_n)$  à  $(e_1, e_1 + e_2, \dots, e_1 + e_n)$

## Matrices : théorie

**Exercice 38** (Opérations sur les lignes et les colonnes).

On note  $(E_{i,j})_{i,j}$  la base canonique de l'ensemble  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ; Calculer

$$E_{i,j} A$$

2. Soit

$$T_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$$

- (a) Donner une forme explicite de  $T_{i,j}$ .
  - (b) Calculer  $T_{i,j} A$
  - (c) Calculer  $T_{i,j}^{-1}$
3. Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $L_{i,j} = I_n + \lambda E_{i,j}$ 
    - (a) Donner une forme explicite de  $L_{i,j}$ .
    - (b) Calculer  $L_{i,j} A$
    - (c) Calculer, quand elle existe,  $L_{i,j}^{-1}$
  4. Que ce passe t'il si on remplace les multiplications à gauche par des multiplications à droite?

## Rang : calculs

**Exercice 39.**

Calculer le rang des matrices suivantes

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2. \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ -7 & -7 & 2 & -8 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

5.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

6.

$$\begin{pmatrix} 1 & \bar{z} & \bar{z}^2 \\ z & 1 & \bar{z} \\ z^2 & z & 1 \end{pmatrix}$$

7.

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_n & 0 \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 37.**

Écrire les matrices de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  dans les cas suivants

$$3. \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$5. \text{ rg } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ m & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -m & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & 2 \end{pmatrix} \text{ en } \text{ fonction de } m \in \mathbb{C}.$$

$$4. \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & -1 & 7 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$6. \text{ rg } \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & -7 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & a & -2 & b \end{pmatrix} \text{ en } \text{ fonction de } a \text{ et } b.$$

**Exercice 40.**

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

1. Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un réel  $a_n$  tel que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n+1 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que la suite  $a$  est arithmético-géométrique.

3. En déduire  $a_n$  en fonction de  $n$  puis donner l'expression  $A^n$  en fonction de  $n$

**Exercice 41.**

Soit  $(e_1, e_2, e_3)$  une famille d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Soit  $A$  la matrice de la famille  $(e_1, e_2, e_3)$ .

1. On suppose qu'après avoir effectué l'opération  $C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1$  puis  $C_3 \leftarrow C_3 - 3C_2$  on a transformé  $A$  en une matrice du type

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & 0 \end{pmatrix}$$

Exprimer  $e_3$  en fonction de  $e_2$  et  $e_1$

2. En déduire une méthode générale pour trouver des combinaisons linéaires dans une famille liée