DM 10

BCPST Spé

Réponses

Sujet 1 : Algèbre et probabilités

1. ```
from random import randint

def initialisation():
    L=[1,1,1] #liste qui représente les trois boules qui prennent la valeur 0
    si elle sont dans l'urne 1 et 0 si elles sont dans l'urne B
    #Pour l'instant, elles sont toutes dans A
    a=randint(0,3)
    if a==2:
        L[randint(0,2)]=0 #une des boule dans l'urne B
    elif a==1:
        L=[0,0,0]
        L[randint(0,2)]=1 #une boule dans l'urne A
    elif a==0:
        L=[0,0,0]
    return L

def simulX(n):
    L=initialisation()
    for _ in range(n):
        k=randint(0,2) # choix au hasard du numéro de la boule
        if L[k]==0:
            L[k]=1 # on change d'urne
        else:
            L[k]=0
    return sum(L)
```

   Si on ne cherche pas à modéliser la composition exacte des urnes mais que l'on s'interresse uniquement au nombre de boules présentes dans l'urne A on obtient

   ```
import random as rd

def X(n):
    nbA=rd.randint(0,3)
    for i in range(n):
```
```

```
        if rd.random()<nbA/3:
            nbA-=1
        else:
            nbA+=1
    return nbA
```

2. $U_0 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$ car X_0 suit la loi uniforme sur $[\![0;3]\!]$.

   D'après la formule des probabilités totales utilisée avec le système complet d'événement $([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2], [X_n = 3])$, on a :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 0) = P(X_n = 0)P_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 0) + P(X_n = 1)P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 0) \\ + P(X_n = 2)P_{[X_n=2]}(X_{n+1} = 0) + P(X_n = 3)P_{[X_n=3]}(X_{n+1} = 0) \\ = P(X_n = 0) \times 0 + P(X_n = 1) \times \frac{1}{3} + P(X_n = 2) \times 0 \\ + P(X_n = 3) \times 0 \end{aligned}$$

   On procède de même pour $P(X_{n+1} = 1)$, $P(X_{n+1} = 2)$, et $P(X_{n+1} = 3)$. On obtient alors :

$$\begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 0) \\ P(X_{n+1} = 1) \\ P(X_{n+1} = 2) \\ P(X_{n+1} = 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3P(X_n = 1) \\ P(X_n = 0) + 2/3P(X_n = 2) \\ 2/3P(X_n = 1) + P(X_n = 3) \\ 1/3P(X_n = 2) \end{pmatrix} \Leftrightarrow U_{n+1} = MU_n.$$

3. Soient P et Q deux éléments de E et λ un réel. On a alors :

$$\begin{aligned} \varphi(P + \lambda Q) &= X(P + \lambda Q) + \frac{1}{3}(1 - X^2)(P + \lambda Q)' \\ &= XP + \frac{1}{3}(1 - X^2)P' + \lambda\left(XQ + \frac{1}{3}(1 - X^2)Q'\right) \qquad \text{linéarité de la dérivation} \\ &= \varphi(P) + \lambda\varphi(Q). \end{aligned}$$

   L'application φ est donc linéaire.

   Comme on sait que φ est linéaire, pour vérifier que φ est une application de E dans E il suffit de vérifier que les images de la base canonique de E sont bien dans E. On remarque alors que :

$$\varphi(1) = X, \qquad \varphi(X) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}X^2,$$
$$\varphi(X^2) = \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}X^3, \qquad \varphi(X^3) = X^2.$$

   Cela justifie que φ est à valeurs dans E.

   De plus, ces calculs montrent aussi que sa matrice est M.

4. (a) On a

$$\begin{aligned}
\varphi(P_k) &= \varphi\left(\frac{1}{8}(X-1)^k(X+1)^{3-k}\right)\\
&= \frac{1}{8}X(X-1)^k(X+1)^{3-k} + \frac{1}{24}(1-X^2)(k(X-1)^{k-1}(X+1)^{3-k}\\
&\quad + (3-k)(X-1)^k(X+1)^{3-k-1})\\
&= \frac{1}{8}(X-1)^k(X+1)^{3-k}\left(X - \frac{k}{3}(X+1) + \frac{3-k}{3}(1-X)\right)\\
&= \left(1-\frac{2k}{3}\right)P_k.
\end{aligned}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned}
P_0 &= \frac{1}{8}(X+1)^3 = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}X + \frac{3}{8}X^2 + \frac{1}{8}X^3\\
P_1 &= \frac{1}{8}(X-1)(X+1)^2 = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}X + \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{8}X^3\\
P_2 &= \frac{1}{8}(X-1)^2(X+1) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}X - \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{8}X^3\\
P_3 &= \frac{1}{8}(X-1)^3 = -\frac{1}{8} + \frac{3}{8}X - \frac{3}{8}X^2 + \frac{1}{8}X^3
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P_0, P_1, P_2, P_3) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1\\ 3 & -1 & -1 & 3\\ 3 & 1 & -1 & -3\\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour montrer que la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est une base de E il suffit de montrer que la matrice précédente est inversible. On a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}\left(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(P_0,P_1,P_2,P_3)\right) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 3 & -1 & -1 & 3\\ 3 & 1 & -1 & -3\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} && \text{multiplication de chaque ligne par 8}\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -4 & 6\\ 0 & 4 & -4 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 2\end{pmatrix} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1\\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1\end{array}\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -4 & 6\\ 0 & 0 & 4 & -12\\ 0 & 0 & 4 & -4\end{pmatrix} && \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2\\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2\end{array}\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -4 & 6\\ 0 & 0 & 4 & -12\\ 0 & 0 & 0 & 8\end{pmatrix} && L_4 \leftarrow L_4 - L_3\\
&= 4
\end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(P_0, P_1, P_2, P_3)$ est inversible, ce qui signifie que $\mathscr{B}'$ est une base de E.

(c) D'après la question 4.a) on a $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1/3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

5. (a) Par définition de la notion de coordonnées, $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(Q) = \begin{pmatrix}1/4\\ 1/4\\ 1/4\\ 1/4\end{pmatrix}$. On retrouve la matrice U_0.

(b) Montrons par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(n)$: « $\varphi^n(Q) = P_0 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n P_2$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Comme $\varphi^0(Q) = Q$ et que $P_0 + P_2 = Q$, la propriété est bien vraie pour $n = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. On a alors

$$\varphi^{n+1}(Q) = \varphi\left(P_0 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n P_2\right) = \varphi(P_0) + \left(-\frac{1}{3}\right)^n \varphi(P_2) = P_0 + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} P_2.$$

Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.

Grâce au principe de récurrence on a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^n(Q) = P_0 + \left(-\frac{1}{3}\right)^n P_2$.

6. On remarque que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi^n(Q)) = M^n U_0 = U_n$ (récurrence rapide pour la dernière égalité).

   Or $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi^n(Q)) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ 3-\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ 3-\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ 1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$.

   Donc $P(X_n=0) = \frac{1}{8}\left(1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$, $P(X_n=1) = \frac{1}{8}\left(3-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$, $P(X_n=2) = \frac{1}{8}\left(3-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$ et $P(X_n = 3) = \frac{1}{8}\left(1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$.

   D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=0) = \frac{1}{8}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=1) = \frac{3}{8}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=2) = \frac{3}{8}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=3) = \frac{1}{8}$.
   Pour de grandes valeurs de n, on approche par les valeurs des limites.

7. On affiche une liste contenant les fréquences d'apparition des valeurs de X_n, c'est-à-dire les valeurs approchées des probabilités $P(X_n = i)$:

```
P=[0,0,0,0]
for k in range(1000):
    P[simulX(100)]+=1/1000

print(P)
```

   On obtient bien des valeurs proches de $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$.

Sujet 2 : Probabilités

1. ```
   from random import randint
   def X(N):
       k=0
       for i in range(N):
           if randint(1,6)==6:
               k+=1
       return k
   ```

2. ```
   def S(N,n):
       somme=0
       NbDes=N
       for i in range(n):
   ```

```
        six=X(NbDes)
        print(six,NbDes)
        somme+=six
        NbDes=NbDes-six
    return somme
```

3. (a) Soient N, M et $k \in \mathbb{N}$ avec $M \leqslant k \leqslant N$. On a :

$$\begin{aligned}\binom{N}{M}\binom{N-M}{k-M} &= \frac{N!}{M!(N-M)!} \times \frac{(N-M)!}{(k-M)!(N-k)!} \\ &= \frac{N!}{M!(k-M)!(N-k)!} \text{ et } \binom{N}{k}\binom{k}{M} \qquad = \frac{N!}{k!(N-k)!} \times \frac{k!}{M!(k-M)!} \\ &= \frac{N!}{M!(k-M)!(N-k)!}.\end{aligned}$$

Donc $\binom{N}{M}\binom{N-M}{k-M} = \binom{N}{k}\binom{k}{M}$.

(b) Notons $\mathscr{P}(n)$ la proposition « il existe p_n tel que X_n suit la loi binomiale de paramètres N et p_n ».

X_1 compte le nombre de succès « obtenir 6 » obtenus parmi N expérience de Bernoulli identiques et indépendantes (le résultat de chacun des N dés). Donc on peut affirmer que $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}\left(N, \frac{1}{6}\right)$.

Donc en posant $p_1 = \frac{1}{6}$, on peut affirmer que $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

(c) i. Sachant $[S_n = M]$, on sait qu'il nous reste $N - M$ dés à jeter et on compte le nombre de 6. On reconnait encore une fois un schéma binomial de paramètres $(N-M)$ et $\frac{1}{6}$. On a donc, pour $M \leqslant k \leqslant N$:

$$P_{[S_n=M]}(X_{n+1} = k - M) = \binom{N-M}{k-M}\left(\frac{1}{6}\right)^{k-M}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-k}.$$

ii. Soit $k \in [\![0; N]\!]$. D'après la formule des probabilités totales appliquées avec le système complet d'événement $([S_n = M])_{0 \leqslant M \leqslant N}$, on a :

$$
\begin{aligned}
P(S_{n+1}=k) &= \sum_{M=0}^{N} P(S_n=M)\times P_{[S_n=M]}(X_{n+1}=k-M)\\
&= \sum_{M=0}^{k} P(S_n=M)\times P_{[S_n=M]}(X_{n+1}=k-M)\\
&\qquad + \sum_{M=k+1}^{N} P(S_n=M)\times P_{[S_n=M]}(X_{n+1}=k-M)\\
&= \sum_{M=0}^{k} \binom{N}{M} p_n^M (1-p_n)^{N-M} \binom{N-M}{k-M} \left(\frac{1}{6}\right)^{k-M} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k} + 0\\
&= \binom{N}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k} (1-p_n)^{N-k} \sum_{M=0}^{k} \binom{k}{M} (6p_n)^M (1-p_n)^{k-M}\\
&= \binom{N}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^{k} \left(\frac{5(1-p_n)}{6}\right)^{N-k} (5p_n+1)^k\\
&= \binom{N}{k} \left(\frac{5p_n+1}{6}\right)^{k} \left(1-\frac{5p_n+1}{6}\right)^{N-k}.
\end{aligned}
$$

Donc $S_{n+1} \hookrightarrow \mathscr{B}(N, p_{n+1})$ avec $p_{n+1} = \dfrac{1+5p_n}{6}$.

(d) La suite (p_n) est donc un suite arithmético géométrique. Avec la méthode vue en cours on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$.

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'événement $[T \leqslant k]$ implique qu'au bout de k lancer les N dés on déjà donné 6 et donc $S_k = N$.

   Réciproquement, si $S_k = N$ alors le nombre de lancers nécessaires pour obtenir les N dés qui ont donné 6 est inférieur à k, c'est-à-dire $T \leqslant k$.

   Donc $[T \leqslant k] = [S_k = N]$ et ainsi $P(T \leqslant k) = P(S_k = N) = p_k^N = \left(1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^k\right)^N$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(T > n) = 1 - \left(1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n\right)^N$.

   On sait que pour tout réel x, $1 - x^N = (1-x)\displaystyle\sum_{i=0}^{N-1} x^i$.

   Donc $P(T > n) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^n \displaystyle\sum_{i=0}^{N-1} \left(1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^n\right)^i$.

   Cette expression reste valable pour $n = 0$ car $P(T > 0) = 1$.

   On en déduit alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$
P(T > n) \leqslant N\left(\frac{5}{6}\right)^n.
$$

   Or, comme $\left|\dfrac{5}{6}\right| < 1$, la série $\sum \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$ est convergente. Comme $P(T > n) \geqslant 0$, d'après le critère de majoration pour les séries à termes positifs on peut affirmer que $\sum P(T > n)$ est convergente.

Ainsi, T admet un espérance et $E(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N$.

6. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrons que X admet une espérance si, et seulement si la série $\sum P(X > n)$ est convergente et dans ce cas $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$.

   On sait que X admet une espérance si, et seulement si la série $\sum nP(X = n)$ est absolument convergente.
   Comme $nP(X = n) \geqslant 0$, étudier la convergence ou la convergence absolue revient au même.
   On peut aussi facilement montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = P(X > n-1) - P(X > n)$.
   Soit $N \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} nP(X = n) &= 0 + \sum_{n=1}^{N} n(P(X > n-1) - P(X > n)) \\
&= \sum_{n=1}^{N} ((n-1)P(X > n-1) - nP(X > n)) + \sum_{n=1}^{N} P(X > n-1) \\
&= -NP(X > N) + \sum_{j=0}^{N-1} P(X > j)
\end{aligned}$$