DM 11

BCPST Spé

à rendre le lundi 13 janvier 2025

Exercice 1

Pour tout entier n, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante.
2. Exprimer I_{n+2} en fonction de I_n.
3. Expliciter I_n en fonction de n. *(Distinguer le cas n pair et le cas n impair)*
4. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{n+1}$.
5. Montrer que la suite de terme général $u_n = (n+1)I_{n+1}I_n$ est constante.
   En déduire un équivalent de I_n en l'infini.
6. Montrer la formule de Wallis : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} = \sqrt{\pi}$.

Exercice 2 (Facultatif)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$ et G l'unique primitive de g sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0, c'est-à-dire $G(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Exprimer pour tout réel x, $f(x)$ à l'aide de la fonction G.
2. Montrer que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer pour tout réel x, $f'(x)$.
3. Montrer que f est une fonction impaire.
4. Étudier les variations de f.
5. (a) Soit $x \in]0;+\infty[$. Justifier que pour tout $t \in [x;2x]$, $\mathrm{e}^{-4x^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$.
   (b) En déduire que pour tout $x > 0$, $x\mathrm{e}^{-4x^2} \leqslant f(x) \leqslant x\mathrm{e}^{-x^2}$.
   (c) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.