# DM 11

BCPST Spé

Réponses

## Exercice 1

1. Pour tout $t \in [0;\pi/2]$ et tout entier $n$, $\sin^n(t) \geqslant 0$. Et comme $0 \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, on a bien $I_n \geqslant 0$.
   De plus $\sin(t) \leqslant 1$ donc pour tout entier $n$, $\sin^{n+1}(t) \leqslant \sin^n(t)$.
   En intégrant cette inégalité (« les bornes sont dans le bon sens ») on obtient $I_{n+1} \leqslant I_n$.
   La suite $(I_n)$ est donc positive et décroissante.
2. 
$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\sin^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}(1-\cos^2(t))\sin^n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= I_n - \int_0^{\pi/2}\cos(t)(\cos(t)\sin^n(t))\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

   On pose, pour $t \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ :

$$\begin{cases} u(t) = \cos(t) & u'(t) = -\sin(t) \\ v'(t) = \cos(t)\sin^n(t) & v(t) = \dfrac{1}{n+1}\sin^{n+1}(t) \end{cases}$$

   $u$ et $v$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= I_n - \left[\cos(t)\times\frac{1}{n+1}\sin^{n+1}(t)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\frac{1}{n+1}\sin^{n+2}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= I_n - \frac{1}{n+1}I_{n+2} \\ \Leftrightarrow \frac{n+2}{n+1}I_{n+2} = I_n &\Leftrightarrow I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n \end{aligned}$$

   *Autre méthode : écrire* $\sin^{n+2}(t) = \sin(t)\times\sin^{n+1}(t)$ *et intégrer par parties en dérivant* $\sin^{n+1}(t)$ *et intégrant* $\sin(t)$.
3. • Si $n$ est pair alors $n = 2p$ et :

$$\begin{aligned} I_{2p} &= \frac{2p-1}{2p}I_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p}\times\frac{2p-3}{2p-2}I_{2p-4} \\ &= \dots \\ &= \frac{2p-1}{2p}\times\frac{2p-3}{2p-2}\times\frac{2p-5}{2p-4}\dots\frac{1}{2}I_0 \end{aligned}$$

Donc $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$ car $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

• Si est est impair alors $n = 2p+1$ et :

$$\begin{aligned} I_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} I_{2p-3} \\ &= \dots \\ &= \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \frac{2p-4}{2p-3} \dots \frac{2}{3} I_1 \end{aligned}$$

Donc $I_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$ car $I_1 = 1$.

4. On sait que la suite $I_n$ est décroissante donc $I_{n+1} \leqslant I_n \leqslant I_{n-1}$ et de plus $I_{n-1} = \dfrac{n+1}{n} I_{n+1}$.

   Donc $1 \leqslant \dfrac{I_n}{I_{n+1}} \leqslant \dfrac{n+1}{n}$. ($I_{n+1} \neq 0$ car intégrale d'une fonction continue, positive qui n'est pas nulle sur tout l'intervalle d'intégration.)

   En passant à la limite on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{I_n}{I_{n+1}} = 1$ et donc $I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} I_{n+1}$.

5. 
$$u_{n+1} = (n+2) I_{n+2} I_{n+1} = (n+2) \frac{n+1}{n+2} I_n I_{n+1} = (n+1) I_{n+1} I_n = u_n$$

   Donc la suite $(u_n)$ est constante.

   On a donc d'une part $u_n = u_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

   Mais aussi $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n I_n^2$.

   Donc $I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, car $I_n \geqslant 0$.

6. D'après la question précédente $I_{2n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$

   Or
$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

   On a donc $\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2} \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{n}(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$

   Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} = \sqrt{\pi}$.

## Exercice 2

1. Comme $G$ est une primitive de $g$, on a, pour tout réel $x$, $f(x) = G(2x) - G(x)$.
2. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le théorème fondamental de l'analyse, $G$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

   $f$ est donc la différence de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, et ainsi $f$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

   De plus $f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x) = 2\mathrm{e}^{-4x^2} - \mathrm{e}^{-x^2}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
   Effectuons le changement de variable $u = -t$.
   On a donc $f(-x) = \displaystyle\int_{x}^{2x} \mathrm{e}^{-(-u)^2}\,(-\,\mathrm{d}u) = -f(x)$.
   $f$ est donc une fonction impaire.
4. D'après la question 2 :
$$f'(x) = 2\mathrm{e}^{-4x^2} - \mathrm{e}^{-x^2} = \mathrm{e}^{-x^2}\left(2\mathrm{e}^{-3x^2} - 1\right)$$
   On remarque que $2\mathrm{e}^{-3x^2} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow -\sqrt{\dfrac{1}{3}\ln 2} \leqslant x \leqslant \sqrt{\dfrac{1}{3}\ln 2}$
   On a donc que $f$ est croissante sur $\left[-\sqrt{\dfrac{1}{3}\ln 2};\sqrt{\dfrac{1}{3}\ln 2}\right]$ et $f$ est décroissante sur $\left]-\infty;-\sqrt{\dfrac{1}{3}\ln 2}\right]$ et sur $\left[\sqrt{\dfrac{1}{3}\ln 2};+\infty\right[$.
5. (a) Sur $[0;+\infty[$ la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est décroissante (sa dérivée vaut $t \mapsto -2t\mathrm{e}^{-t^2}$) donc si $x \leqslant t \leqslant 2x$ alors $\mathrm{e}^{-4x^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$.
   (b) On intègre l'inégalité précédente pour $t$ variant de $x$ à $2x$. (Attention $t$ est la variable donc $\mathrm{e}^{-x^2}$ et $\mathrm{e}^{-4x^2}$ sont des constantes)
$$\int_x^{2x} \mathrm{e}^{-4x^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow x\mathrm{e}^{-4x^2} \leqslant f(x) \leqslant x\mathrm{e}^{-x^2}.$$
   (c) Soit $x > 0$, on pose $X = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{X}$, on a $x\mathrm{e}^{-x^2} = \dfrac{\sqrt{X}}{\mathrm{e}^X}$. Or on sait qu'au voisinage de $+\infty$ $\sqrt{X} = o(\mathrm{e}^X)$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2} = 0$.
   De même $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-4x^2} = 0$.
   Donc par encadrement de limites, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.