Devoir surveillé n° 4

18 janvier 2025

Durée de l'épreuve : 4h

Le devoir comporte un problème et deux exercices indépendants. Pour le deuxième exercice vous devez choisir entre un exercice de type agro véto ou un exercice plus théorique et un peu plus dur. ***Indiquez votre choix en début de copie.***
La calculatrice n'est pas autorisée. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Les résultats seront soulignés ou encadrés.

Problème

Dans tout ce problème, n et p sont deux entiers naturels non nuls et on note :

$$S_{p,n} = \sum_{k=1}^{n} k^p.$$

Dans la partie A, on calcule l'inverse d'une matrice de taille 3, les résultats seront repris à la fin de la partie B où on démontre quelques propriétés de $S_{p,n}$ (équivalent, caractère polynômial). Ces propriétés seront exploitées dans le calcul d'une limite de probabilité (partie C).

Partie A : Inversion d'une matrice et factorisation d'un polynôme

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique notée $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$.
On considère la famille de polynômes (R, S, T) dont la matrice relative à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est :

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(R, S, T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Expliciter les polynômes R, S et T.
2. a) Justifier que M est inversible et calculer M^{-1}.
   b) Montrer que (R, S, T) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   c) Déterminer les coordonnées de $(1+X)^2$ dans la base $\mathscr{B}$.
   d) En déduire trois réels a, b et c tels que $(1+X)^2 = aR + bS + cT$.
   Indication : on pourra faire appel à une formule de changement de base.
3. a, b et c prennent les valeurs trouvée à la question précédente.
   Écrire le polynôme $aX + bX^2 + cX^3$ sous la forme d'un produit de polynômes de degré 1.

Partie B : Calcul de l'équivalent d'une somme

Dans cette partie f désigne une fonction réelle d'une variable réelle définie sur $[0;1]$. Cette fonction est supposée continue sur $[0;1]$, strictement croissante et positive.

4. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = n\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ est bien définie et démontrer que $I_n > 0$.
5. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que :
$$\forall k \in [\![1;n]\!], \quad \forall x \in \left[\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}\right], \qquad f\left(\frac{k-1}{n}\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{k}{n}\right).$$
   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$
   c) Encadrer alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le quotient $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}{I_n}$ et en déduire que :
$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n.$$
6. À l'aide d'une fonction f judicieusement choisie, démontrer que :
$$S_{p,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}.$$
7. On considère la famille de polynômes $(P_j)_{1\leqslant j\leqslant p+1}$ définie par :
$$\forall j \in [\![1;p+1]\!], \quad P_j = (1+X)^j - X^j.$$
   On note $\mathscr{B} = (1, X, \ldots, X^p)$ la base canonique de $\mathbb{R}_p[X]$.
   a) Soit $j \in [\![1;p+1]\!]$. Déterminer le degré de P_j. *Le résultat sera rigoureusement justifié.*

b) Pour tout $j \in [\![1;p+1]\!]$, exprimer P_j dans la base $\mathscr{B}$ puis écrire la matrice A_p de la famille de polynômes $(P_j)_{1\leqslant j\leqslant p+1}$ dans la base $\mathscr{B}$.

c) Justifier que A_p est inversible. Que peut-on en déduire pour la famille de polynômes $(P_j)_{1\leqslant j\leqslant p+1}$?

d) En déduire qu'il existe $(\alpha_{j,p})_{1\leqslant j\leqslant p+1} \in \mathbb{R}^{p+1}$ tel que :

$$(1+X)^p = \sum_{j=1}^{p+1} \alpha_{j,p} P_j.$$

On ne cherchera pas, dans cette question, à déterminer la valeur des $\alpha_{j,p}$.

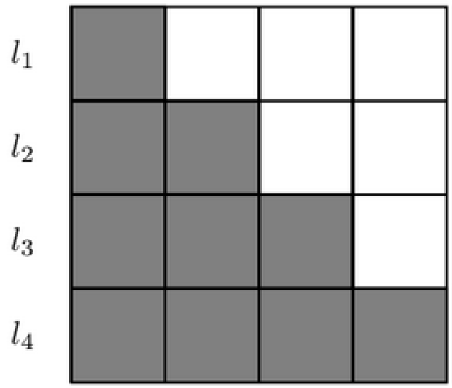
e) Soit $Q \in \mathbb{R}_{p+1}[X]$ tel que $Q_p = \displaystyle\sum_{j=1}^{p+1} \alpha_{j,p} X^j$. Démontrer que $S_{p,n} = Q_p(n)$.

8. a) Vérifier que $A_2 = M$ *(cf. partie A)*.

b) Retrouver, à l'aide des questions précédentes, une expression de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ sans symbole $\sum$.

Partie C : Calcul de la limite d'une probabilité

On considère un carré de côté n muni d'un quadrillage dans lequel les cases sont grises ou blanches. La figure ci-dessous illustre la situation pour $n = 4$ (mais les calculs devront êtres menés pour n entier naturel non nul quelconque).



Comme indiqué sur la figure, les case situées sous ou sur une diagonale du carré sont grises, les autres sont laissées blanches. Chaque ligne est notée ℓ_k (pour $k \in [\![1;n]\!]$).

On considère l'expérience aléatoire suivante :

— on choisit au hasard l'une des ligne du carré,

— puis on choisit successivement p cases sur cette ligne (les choix de ces p cases sont supposés indépendants les uns des autres).

Pour $k \in [\![1;n]\!]$, on note L_k l'événement « les cases sont choisies sur la ligne ℓ_k ».

On considère également l'événement A « on choisit au moins une case blanche parmi les p cases choisies ».

9. Soit $k \in [\![1;n]\!]$. Déterminer $P(L_k)$.

10. a) Exprimer à l'aide d'une phrase l'événement $\overline{A}$.

b) Calculer $P_{L_k}(\overline{A})$ et en déduire $P(\overline{A})$ puis $P(A)$ en fonction de $S_{p,n}$.

c) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(A)$ en fonction de p.

Exercice 1

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de E.

Pour tout polynôme P de E, on note indifféremment P ou $P(X)$.

Pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, la dérivée P' du polynôme $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ est le polynôme $P' = \beta + 2\gamma X$ et la dérivée seconde P'' de P est le polynôme $P'' = 2\gamma$.

On note, pour tout polynôme P de E :

$$a(P) = P - XP', \qquad b(P) = P - P', \qquad c(P) = 2XP - (X^2-1)P'$$

Par exemple, $a(X^2) = X^2 - X(2X) = -X^2$.

Enfin, on note $f = b \circ a - a \circ b$.

Partie I : Étude de a

1. Montrer que a est un endomorphisme de E.
2. Montrer que la matrice A de a dans la base $\mathscr{B}$ de E est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
3. L'endomorphisme a est-il bijectif ? Déterminer $\ker(a)$ et $\mathrm{Im}(a)$.

On admet, pour la suite de l'exercice, que b et c sont des endomorphismes de E.
On note B et C les matrices, dans la base $\mathscr{B}$ de E, de b et c respectivement.

Partie II : Étude de b

4. Expliciter la matrice B. *Le résultat sera justifié.*
5. Montrer que b est bijectif et que, pour tout Q de E, on a : $\quad b^{-1}(Q) = Q + Q' + Q''$.

Partie III : Étude de c

6. Montrer que : $\quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
7. L'endomorphisme c est-il bijectif ?
8. On pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   Calculer CU, CV et CW.
9. Montrer que la famille (U, V, W) est une famille libre.
10. Déduire de la question 8. trois polynômes P_1, P_2 et P_3 tels que
    $$c(P_1) = -2P_1 \qquad c(P_2) = 0 \qquad c(P_3) = 2P_3.$$
    Que peut-on dire de la famille (P_1, P_2, P_3) ?
11. En déduire alors une matrice R, carrée d'ordre 3, inversible, et une matrice D, carrée d'ordre 3, diagonale, à coefficients diagonaux dans l'ordre croissant, telles que $C = RDR^{-1}$.

Partie IV : Étude de f

12. Montrer que $\quad \forall P \in E, \quad f(P) = P'$.
13. En déduire : $\quad (BA - AB)^3 = 0$.

Exercice 2 choix Agro-véto

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On note 0_E le vecteur nul de E.
On note i l'application identité de E, et θ l'application constante nulle [1] de E dans E :

$$i : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array} \qquad \qquad \theta : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & 0_E \end{array}$$

On considère un endomorphisme f de E tel que :

$$f \neq \theta \qquad f^2 + i \neq \theta \qquad f \circ (f^2 + i) = \theta,$$

où f^2 désigne $f \circ f$.

1. a) Montrer que f n'est pas bijectif. On raisonnera par l'absurde.
   b) En déduire que $\ker f \neq \{0_E\}$.

   Soit v_1 appartenant à E tel que : $v_1 \neq 0_E$ et $f(v_1) = 0_E$.
2. Montrer que $f^2 + i$ n'est pas bijectif, puis en déduire qu'il existe v appartenant à E tel que : $v \neq 0_E$ et $f^2(v) = -v$.

   Soit v_2 appartenant à E tel que : $v_2 \neq 0_E$ et $f^2(v_2) = -v_2$. On note $v_3 = f(v_2)$.
3. Montrer : $f(v_3) = -v_2$.
4. a) Montrer que la famille $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E.
   b) Déterminer la matrice C de f dans la base $\mathscr{B}$.

   On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
   et le sous-espace vectoriel $\mathscr{F}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par (A, B, C), c'est-à-dire :
   $$\mathscr{F} = \left\{ aA + bB + c\,C ; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$
5. Déterminer la dimension de $\mathscr{F}$.
6. Montrer : $\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) ; CM = MC\} = \mathscr{F}$.
7. a) Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, calculer la matrice $(aA + bB + c\,C)^2$.
   b) En déduire une matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}$.
8. On note $g = f^2 - i$.
   Montrer que g est bijectif et exprimer g^{-1} à l'aide de f et de i.

1. Les notations sont étranges mais il faut les respecter

Exercice 2 choix théorique

Soit $n \geqslant 1$ un entier. On considère l'application $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & ((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{array}$$

Dans cet exercice, si $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$, on notera $\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\overrightarrow{y} = (y_1, \ldots, y_n)$.

1. a) Montrer que pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$, on a $\phi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) \geqslant 0$.
   b) Trouver toutes les valeurs de $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ telles que $\phi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 0$.
   c) Soit $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $\phi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 0$ pour tout $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ (où $\overrightarrow{0}$ est le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$).
2. On fixe $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ et on considère la fonction

$$\begin{array}{rl} \psi_{\overrightarrow{x}} : & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \overrightarrow{y} \longmapsto \phi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \end{array}$$

   a) Montrer que $\psi_{\overrightarrow{x}}$ est une application linéaire.
   b) Quels sont le rang et la dimension du noyau de $\psi_{\overrightarrow{x}}$? Justifiez votre réponse.
   c) On note $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et on admet que sa dimension est n. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ définie par $f(\overrightarrow{x}) = \psi_{\overrightarrow{x}}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
3. Soient A et B deux ensembles finis tels que $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B) = \mathrm{Card}(A \cap B)$. Montrer que $A = B$.

Dans la suite de l'exercice, on fixe un autre entier $m \geqslant 1$, et on considère des sous-ensembles différents $S_1, \ldots, S_m$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ (autrement dit, on suppose que $S_j \neq S_k$ si $j \neq k$). On suppose qu'il existe un entier ℓ avec $1 \leqslant \ell \leqslant n$ tel que toutes les intersections $S_j \cap S_k$ avec $j \neq k$ ont le même cardinal ℓ (autrement dit, $\mathrm{Card}(S_j \cap S_k) = \ell$ pour tout $j \neq k$). Le but de cet exercice est de montrer que $m \leqslant n$.

4. Montrer que $\mathrm{Card}(S_j) \geqslant \ell$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant m$.

On introduit la matrice $A = (a_{i,j})_{i \in [\![1,n]\!], j \in [\![1,m]\!]} \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ définie par

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in S_j \\ 0 & \text{si } i \notin S_j. \end{cases}$$

Finalement, pour $1 \leqslant j \leqslant m$, on note $\overrightarrow{x_j}$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice colonne des coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est la j-ième colonne de A.
Par exemple, si $n = 4, m = 3, S_1 = \{1, 2, 3\}, S_2 = \{1, 2\}$ et $S_3 = \{1, 2, 4\}$, on a $\ell = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ainsi que $\overrightarrow{x_1} = (1, 1, 1, 0), \overrightarrow{x_2} = (1, 1, 0, 0)$ et $\overrightarrow{x_3} = (1, 1, 0, 1)$.

5. (Exemple) On suppose, uniquement dans cette question, que $n = 4, m = 4, S_1 = \{1, 2\}, S_2 = \{2\}$, $S_3 = \{2, 3\}$ et $S_4 = \{2, 4\}$. Que vaut ℓ dans cet exemple ? Donnez la matrice A.
6. Montrer que pour tout $j \neq k$, on a $\phi\left(\overrightarrow{x_j}, \overrightarrow{x_j}\right) \geqslant \ell$ et $\phi\left(\overrightarrow{x_j}, \overrightarrow{x_k}\right) = \ell$.
7. On suppose que $m > n$.
   a) Montrer que la famille $\left(\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_m}\right)$ est liée.
   On fixe dans la suite des nombres réels $r_1, \ldots, r_m$ non tous nuls tels que $r_1 \overrightarrow{x_1} + \cdots + r_m \overrightarrow{x_m} = \overrightarrow{0}$.
   b) Montrer que

$$\sum_{j=1}^{m} r_j^2 \phi\left(\overrightarrow{x_j}, \overrightarrow{x_j}\right) + 2\ell \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant m} r_j r_k = 0.$$

   c) En déduire que

$$\sum_{j=1}^{m} r_j^2 \left(\phi\left(\overrightarrow{x_j}, \overrightarrow{x_j}\right) - \ell\right) + \ell \left(\sum_{j=1}^{m} r_j\right)^2 = 0.$$

   d) Aboutir à une contradiction.
8. Peut-on avoir $m = n$? Peut-on avoir $m = n$ et $k = n - 1$?