Correction du devoir surveillé n° 4

Problème

Partie A : Inversion d'une matrice et factorisation d'un polynôme

1. La matrice M contient les coordonnées des polynômes R, S et T dans la base $\mathscr{B}$. On a donc :

$$\boxed{R = 1, \quad S = 1 + 2X \quad \text{et } T = 1 + 3X + 3X^2.}$$

2. a) M est une matrice triangulaire sans 0 sur la diagonale donc elle est inversible.

   On pose $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et on cherche à résoudre $MU = V$ (d'inconnue U).

$$MU = V \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = a \\ 2y + 3z = b \\ 3z = c \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a - \dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{6} \\ y = \dfrac{b-c}{2} \\ z = \dfrac{c}{3} \end{cases}$$

   Donc $\boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.}$

   b) La matrice représentant la famille (R, S, T) dans une base de $\mathbb{R}_2[X]$ est inversible donc, d'après notre cours, $\boxed{(R, S, T) \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X]}$.

   c) $(1 + X)^2 = 1 + 2X + X^2$ donc $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}((1 + X)^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.}$

   d) Cette question nous demande de déterminer les coordonnées de $(1 + X)^2$ dans la base (R, S, T).
   D'après la formule de changement de base pour les coordonnées d'un vecteur, on sait que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}((1 + X)^2) = P_{\mathscr{B},(R,S,T)} \times \mathrm{Mat}_{(R,S,T)}((1 + X)^2).$$

   On en déduit que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et donc $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.

   En conclusion, $\boxed{(1 + X)^2 = \frac{1}{6}R + \frac{1}{2}S + \frac{1}{3}T.}$

3. $\frac{1}{6}X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3}X^3 = X\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}X + \frac{1}{3}X^2\right) = X(X + 1)\left(\frac{1}{3}X + \frac{1}{6}\right)$.

   Donc $\boxed{\frac{1}{6}X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3}X^3 = X(X + 1)\left(\frac{1}{3}X + \frac{1}{6}\right).}$

Partie B : Calcul de l'équivalent d'une somme

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f étant continue sur $[0; 1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ est bien définie et donc $\boxed{I_n \text{ est bien définie}}$.
   De plus, f est strictement croissante donc f ne peut pas être la fonction nulle.
   Ainsi, f est continue sur $[0; 1]$, positive et n'est pas la fonction nulle. Donc, d'après la propriété de stricte positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x > 0$.
   Comme $n > 0$, on en déduite que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n > 0.}$

5. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1;n]\!]$ fixés. L'intervalle $\left[\frac{k-1}{n};\frac{k}{n}\right]$ est bien inclus dans $[0;1]$.

De plus, par définition de la notion de fonction croissante on a

$$\frac{k-1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{k}{n} \Longrightarrow f\left(\frac{k-1}{n}\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Donc $\boxed{\forall k \in [\![1;n]\!], \quad \forall x \in \left[\frac{k-1}{n};\frac{k}{n}\right], \qquad f\left(\frac{k-1}{n}\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{k}{n}\right).}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1;n]\!]$ fixés. Grâce à la propriété de croissance de l'intégrale, nous pouvons passer à l'intégrale pour x variant entre $\frac{k-1}{n}$ et $\frac{k}{n}$ dans l'inégalité de la question précédente (les fonctions intégrées sont bien continues). On obtient :

$$\int_{(k-1)/n}^{k/n} f\left(\frac{k-1}{n}\right)\mathrm{d}x \leqslant \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{(k-1)/n}^{k/n} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{1}{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right) \leqslant \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right).$$

On somme alors ces encadrement pour k allant de 1 à n. On obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) \\
\Leftrightarrow &\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right) \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) && \text{Relation de Chasles} \\
\Leftrightarrow &\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) && \text{changement d'indice} i = k-1
\end{aligned}$$

En conclusion $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).}$

c) Grâce à la partie de droite de l'encadrement de la question précédente, en multipliant par $n > 0$, on a $I_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Grâce à la partie de gauche de l'encadrement de la question précédente, en multipliant par $n > 0$ et en ajoutant $f(1)$ et soustrayant $f(0)$ on obtient : $\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant I_n + f(1) - f(0)$.

On en déduit alors que

$$\begin{aligned}
&I_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant I_n + f(1) - f(0) \\
\Leftrightarrow &1 \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}{I_n} \leqslant 1 + \frac{f(1)-f(0)}{I_n} && \text{car } I_n > 0.
\end{aligned}$$

De plus, par simple opération sur les limites, $\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

Donc, par propriété d'encadrement de limites $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}{I_n} = 1$, c'est-à-dire $\boxed{\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n.}$

6. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. On applique le résultat précédent à la fonction $x \mapsto x^p$. Cette fonction est bien définie sur $[0;1]$, continue sur $[0;1]$, strictement croissante et positive. Il est donc possible d'appliquer notre résultat. On a donc

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p \underset{n\to+\infty}{\sim} n\int_0^1 x^p\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow &\frac{1}{n^p}S_{p,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times \frac{1}{p+1} \\
\Leftrightarrow &S_{p,n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}.
\end{aligned}$$

7. a) Soit $j \in [\![1; p+1]\!]$. Grâce à la formule du binôme on a :

$$P_j = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} X^k - X^j = \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j}{k} X^k.$$

Dans l'expression développée de P_j, le terme de plus grande puissance est $\binom{j}{j-1} X^j = jX^j$.

Comme $j \neq 0$ (*coefficient de* X^{j-1} *non nul*), on peut affirmer que $\boxed{\deg(P_j) = j-1.}$

b) On reprend notre expression développée de P_j de la question précédente. On a donc :

$$P_j = \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j}{k} X^k + \sum_{k=j}^{p} 0 X^k.$$

On en déduit que

$$A_p = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P_1, P_2, \dots, P_{p+1}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & & & & \binom{p}{1} & \binom{1}{p+1} \\ 0 & 0 & 3 & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0\ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & p-1 & \binom{p}{p-2} & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & p & \binom{p+1}{p-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & p+1 \end{pmatrix}.$$

c) La matrice A_p est triangulaire et sans 0 sur la diagonale donc $\boxed{A_p \text{ est inversible}}$.

Étant donné que A_p est la matrice de la famille $(P_1, \dots, P_{p+1})$ dans la base $\mathscr{B}$ et que cette matrice est inversible, on peut affirmer que $\boxed{(P_1, \dots, P_{p+1}) \text{ est une base de } \mathbb{R}_p[X].}$

d) $(1+X)^p \in \mathbb{R}_p[X]$ et $(P_1, \dots, P_{p+1})$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

Donc $(1+X)^p$ admet des coordonnées dans cette base, autrement dit

$$\boxed{\text{il existe } (\alpha_{j,p})_{1 \leqslant j \leqslant p+1} \in \mathbb{R}^{p+1} \text{ tel que } (1+X)^p = \sum_{j=1}^{p+1} \alpha_{j,p} P_j.}$$

e) Utilisons les questions précédentes pour transformer $S_{p,n}$:

$$\begin{aligned} S_{p,n} &= \sum_{k=1}^{n} k^p = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^p && \text{on pose } i = k-1 \\ &= \sum_{j=1}^{p+1} \alpha_{j,p} P_j(i) && \text{question précédente évaluée en } i \\ &= \sum_{j=1}^{p+1} \left(\alpha_{j,p} \sum_{i=0}^{n-1} P_j(i) \right) && \text{échange de somme et factorisation} \\ &= \sum_{j=1}^{p+1} \left(\alpha_{j,p} \sum_{i=0}^{n-1} ((1+i)^j - i^j) \right) && \text{définition de } P_j \\ &= \sum_{j=1}^{p+1} \alpha_{j,p} n^j && \text{somme télescopique} \\ &= Q_p(n) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{On a bien } S_{p,n} = Q_p(n).}$

8. a) On peut remarquer que $P_1 = 1 = R$, $P_2 = 1 + 2X = S$ et $P_3 = 1 + 3X + 3X^2 = T$. Donc on a bien $\boxed{A_2 = M.}$

   b) D'après la question 7.e) on a $S_{2,n} = Q_2(n)$.

   De plus, d'après la question 2.d), $(1+X)^2 = \frac{1}{6}P_1 + \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{3}P_3$.

   Donc $\alpha_{1,2} = \frac{1}{6}$, $\alpha_{2,2} = \frac{1}{2}$ et $\alpha_{3,2} = \frac{1}{3}$.

   On en déduit que $Q_2 = \frac{1}{6}X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3}X^3$.

   Donc $S_{2,n} = \sum_{k=1}^{n} k^2 = Q_2(n) = n(n+1)\left(\frac{1}{3}n + \frac{1}{6}\right)$ d'après la forme factorisée de la question 3.

   En conclusion, on retrouve que $\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$

Partie C : Calcul de la limite d'une probabilité

9. Le choix de la ligne se fait au hasard et nous avons n lignes à notre disposition. Donc $\boxed{P(L_k) = \frac{1}{n}.}$

10. a) L'événement $\overline{A}$ signifie qu'il n'y a aucune case blanche parmi les p cases choisies donc que l'on a choisi p cases grises.

   b) Sachant que l'événement L_k est réalisé, notre choix des p cases se fait sur la ligne k donc parmi k cases grises et $n-k$ cases blanches.

   Les choix des p cases étant supposés indépendants et la probabilité de choisir une case grise est de $\frac{k}{n}$ on peut affirmer que $P_{L_k}(\overline{A}) = \left(\frac{k}{n}\right)^p$.

   Les événements $(L_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ forment un système complet d'événements car, d'après la description de l'expérience, ils sont disjoints deux à deux et leur union est égale à l'univers de l'expérience.

   Donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(\overline{A}) = \sum_{k=1}^{n} P(L_k)P_{L_k}(\overline{A}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p = \frac{1}{n^{p+1}}S_{p,n}.$$

   Ainsi $\boxed{P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{n^{p+1}}S_{p,n}.}$

   c) D'après la question 6., $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{p+1}}S_{p,n} = \frac{1}{p+1}$.

   Donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} P(A) = 1 - \frac{1}{p+1} = \frac{p}{p+1}.}$

Exercice 1

Partie I : Étude de a

1. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ alors $\deg P' \leqslant 1$ donc $\deg XP' \leqslant 1 + 1$ et donc

$$\deg(P - XP') \leqslant 2$$

Soit P et Q deux polynômes de degré plus petit que 2 et α un réel

$$\begin{aligned}
a(\alpha P + Q) &= (\alpha P + Q) - X(\alpha P + Q)' \\
&= \alpha P + Q - X(\alpha P' + Q') && \text{linéarité de l'intégrale} \\
&= \alpha P - \alpha XP' + Q - XQ' \\
&= \alpha a(P) + a(Q)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'application } a \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X].}$$

2. On calcule

$$a(1) = 1 - 0 \cdot X = 1 =$$

$$a(X) = X - X1 = 0$$
$$a(X^2) = X^2 - X(2X) = -X^2$$

$$\boxed{\text{La matrice de } a \text{ dans la base } \mathscr{B} \text{ de } E \text{ est : } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.}$$

3. La matrice associée à a n'est pas inversible car elle contient une colonne nulle, elle est donc de rang plus petit que 2, donc l'application a n'est pas bijective.

$$\boxed{\text{L'application } a \text{ n'est pas bijective.}}$$

Soit $P = x + yX + zX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$

$$\begin{aligned} P \in \ker a \Leftrightarrow a(P) = 0 \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x &= 0 \\ 0y &= 0 \\ -z &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = z = 0 \\ &\Leftrightarrow P = yX \end{aligned}$$

D'après un résultat du cours

$$\mathrm{im}(a) = \mathrm{Vect}(a(1), a(X), a(X^2)) = \mathrm{Vect}(1, 0, -X^2)$$

Les deux vecteurs étant non colinéaires ils forment une base de $\mathrm{im}\, a$

$$\boxed{\ker a = \mathrm{Vect} X \text{ et } \mathrm{im}\, a = \mathrm{Vect}(1, X^2)}$$

Partie II : Étude de b

4. Notons φ l'endomorphisme[1] de $\mathbb{R}_2[X]$ définie pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$ par

$$\varphi(P) = P + P' + P\text{''}$$

Alors pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$

$$\begin{aligned} \varphi \circ b(P) &= \varphi(P - P') && \text{définition de } b \\ &= P - P' + (P - P')' + (P - P')'' && \text{définition de } \varphi \\ &= P - P' + P' - P'' + P'' - P''' \\ &= P - P''' \\ &= P \end{aligned}$$

car la dérivée troisième d'un polynôme de degré au plus deux est nulle

1. C'est un endomorphisme par le même type de raisonnement sur le degré que précédemment

Et

$$\begin{aligned}
b \circ \varphi(P) = b(P + P' + P'')&\text{définition de } \varphi \\
&= P + P' + P'' - (P + P' + P'')') && \text{définition de } b \\
&= P + P' + P'' - P' + P'' + P''' \\
&= P - P''' \\
&= P
\end{aligned}$$

Comme ce sont des endomrophismes d'un espace vectoriel de dimension finie, il n'est pas utile de calculer $b \circ \varphi$

$$\boxed{b \text{ est bijective et sa bijection réciproque est } \varphi}$$

Partie III : Étude de c

5. On a

$c(1) = 2X \cdot 1 - (X^2 - 1)0 = 2X \qquad c(1) = 2X \cdot X - (X^2 - 1)1 = X + X^2 \qquad c(X^2) = 2X \cdot X^2 - (X^2 - 1) \cdot 2X = 2X$

Ce qui démontre bien

$$\boxed{C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

6. La matice C comporte deux fois la même colonne donc son rang est plus petit que 2, elle n'est pas inversible donc

$$\boxed{\text{L'application } c \text{ n'est pas bijective.}}$$

7. On trouve

$$\boxed{CU = -2U,\ CV = 0 \text{ et } CW = 2W.}$$

8. Soit α β et γ trois réels On suppose que

$$\alpha U + \beta V + \gamma W = 0$$

alors

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = 0 \\ -2\alpha + 2\gamma & = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma & = 0 \end{cases}$$

Ce système est équivalent

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = 0 \\ \beta + 2\gamma & = 0 \qquad L_2 \leftarrow \dfrac{1}{2} L_2 + L_1 \\ -2\beta + & = 0 \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

Ce qui démontre

$$\boxed{\text{La famille } (U, V, W) \text{ est libre.}}$$

La famille (U, V, W) est libre, à trois vecteurs comme la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$ c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

D'après les calculs de la question 7 la matrice de l'application c dans la base (U, V, W) est

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit R la matrice des coordonnées des vecteurs (U, V, W) exprimées dans la bases canonique.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

c'est une matrice de passage.
D'après la formule de changement de base du cours

$$D = R^{-1}CR \qquad \text{et} \qquad RDR^{-1} = C$$

9. $\boxed{\text{On pose } R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$

10. On a vu que dans la base $(1, X, X^2)$

$$CU = -2U \qquad CV = 0 \qquad CW = 2W$$

Le polynôme dont la matrice des coordonnées dans la bases canonique est $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est $P_1 = 1 - 2X + X^2$.

De même le polynôme représenté par $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est $P_2 = 1 - X^2$ et celui représenté par $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est $P_3 = 1 + 2X + X^2$.

$$\boxed{P_1 = 1 - 2X + X^2,\ P_2 = 1 - X^2 \text{ et } P_3 = 1 + 2X + X^2.}$$

Partie IV : Étude de f

11. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$

$$\begin{aligned} f(P) &= b(a(P)) - a(b(P)) \\ &= b(P - xP') - a(P - P') \\ &= (P - xP') - (P - XP')' - ((P - P') - X(P - P')') \\ &= (P - xP') - (P' - P' - XP'') - (P - P' - X(P' - P'')) \\ &= P - XP' + XP'' - P + P' + XP' - XP'' \\ &= P' \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall P \in E, \quad f(P) = P'}$$

12. La matrice associée à f dans la bases canonique est, d'après les théorèmes sur le liens entres opérations sur les matrices et opérations sur les applications linéaire

$$BA - AB$$

Donc la matrice associée à $f \circ f \circ f$ dans la bases canonique est

$$(BA - AB)^3$$

Or Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$

$$f(f(f(P))) = f(f(P')) = f(P'') = P''' = 0$$

car la dérivée troisième d'un polynôme de degré au plus deux est nulle. La matrice de l'application nulle étant la matrice nulle.

$$\boxed{(BA - AB)^3 = 0}$$

Exercice 2 Agro-véto

1. a) Par l'absurde supposons que f est bijective alors la bijection réciproque f^{-1} existe et en utilisant $f \circ (f^2 + i) = \theta$

$$f^{-1} \circ f \circ (f^2 + i) = f^{-1} \circ \theta$$

ce qui donne (associativité de la composition)

$$i \circ (f^2 + i) = \theta$$

puis

$$(f^2 + i) = \theta$$

qui est en contradiction avec l'énoncé.

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ n'est pas bijectif.}}$$

b) D'après un théorème du cours un endomorphisme en dimension finie est bijectif si et seulement si il est injectif, donc f n'est pas injectif donc

$$\boxed{\ker f \neq \{0_E\}.}$$

Par définition du noyau il existe un vecteur non nul v tel que

$$f(u) = 0_{\mathbb{R}} u = 0_E$$

$$\boxed{\text{Il existe } u \text{ appartenant à } E \text{ tel que : } u \neq 0_E \text{ et } f(u) = 0_E.}$$

2. Supposons par l'absurde que $f^2 + i$ est bijective, alors la bijection réciproque $(f^2 + i)^{-1}$ existe.
On sait que $f \circ (f^2 + i) = \theta$. donc

$$f \circ (f^2 + i) \circ (f^2 + i)^{-1} = \theta \circ (f^2 + i)^{-1}$$

donc

$$f \circ i = \theta$$

et donc

$$f = \theta$$

Ce qui est en contradiction avec l'énoncé.

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } f^2 + i \text{ n'est pas bijectif.}}$$

Comme $f^2 + i$ est un endomorphisme[2] $f^2 + i$ n'est pas bijectif est équivalent à $f^2 + i$ n'est pas injectif[3].

2. Ou plus généralement ce résultat est vrai si le dimension de l'ev de départ est égal à la dimension de l'ev d'arrivée
3. est équivalent à $f^2 + i$ n'est surjectif.

Donc f^2+i n'est pas injectif et donc

$$\ker(f^2+i) \neq \{0_E\}$$

Il existe donc $v \in \ker f^2+i$ avec v non nul .

$$(f^2+i)(v) = 0_E$$

donc

$$f^2(v)+v = 0_E$$

$$\boxed{\text{Il existe } v \text{ appartenant à } E \text{ tel que : } v \neq 0_E \text{ et } f^2(v) = -v.}$$

Soit v_2 appartenant à E tel que : $v_2 \neq 0_E$ et $f^2(v_2) = -v_2$. On note $v_3 = f(v_2)$.

3. Montrer : $f(v_3) = -v_2$. On a

$$v_3 = f(v_2)$$

donc

$$f(v_3) = f \circ f(v_2) = -v_2$$

par définition de v_2

$$\boxed{\text{On a } f(v_3) = -v_2.}$$

4. a) Soit α, β et γ trois réels tels que

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_E \tag{E0}$$

alors comme f est un endomorphisme

$$f\left(\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3\right) = f(0_E) = 0_E$$

puis par linéarité

$$\alpha f\left(v_1\right) + \beta f\left(v_2\right) + \gamma f\left(v_3\right) = 0_E \tag{E1}$$

Par définition nous avons

$$f(v_1) = 0 \qquad f\left(v_2\right) = v_3 \qquad f\left(v_3\right) = -v_2$$

donc E1 devient

$$\beta v_3 - \gamma v_2 = 0_E$$

en appliquant f on trouve

$$\beta f(v_3) - \gamma f(v_2) = f(0_E)$$

donc

$$-\beta v_2 - \gamma v_3 = 0_E \tag{E2}$$

En sommant E0+E2

$$\alpha v_1 = 0_E$$

Comme $v_1 \neq 0_E$ alors $\alpha = 0_R$. Donc E0 devient

$$\beta v_2 + \gamma v_3 = 0_E \tag{E3}$$

En sommant E3+E1

$$2\beta v_2 = 0_E$$

et comme $v_2 \neq 0_E$ on obtient $\beta = 0_{\mathbb{R}}$ et E3 devient

$$\gamma v_3 = 0_E$$

comme $v_3 \neq 0_E$ on obtient $\gamma = 0_{\mathbb{R}}$

$$\alpha = \beta = \gamma = 0_{\mathbb{R}}$$

La famille $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est libre et comme la dimension de E est trois

$$\boxed{\text{la famille } \mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3) \text{ est une base de } E.}$$

b) Par définition

$$\boxed{C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

5. Soit a b et c trois réels tels que

$$aA + bB + cC = 0$$

alors on obtient [4]

$$\begin{cases} a & = 0 \\ b & = 0 \\ c & = 0 \\ -c & = 0 \\ b & = 0 \end{cases}$$

Donc

$$a = b = c = 0$$

Donc la famille (A, B, C) est libre.
Par définition A, B, C forment une famille génératrice de $\mathscr{F}$.

La famille (A, B, C) est une base de $\mathscr{F}$.

$$\boxed{\text{La dimension de de } \mathscr{F} \text{ est } 3.}$$

6. Posons $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ Alors

$$\begin{aligned}
CM = MC &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -g & -h & -i \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ 0 & f & -e \\ 0 & i & -h \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 0 & = 0 \\ 0 & = c \\ 0 & = -b \\ -g & = 0 \\ -h & = f \\ -i & = -e \\ d & = 0 \\ e & = i \\ f & = -h \end{cases} \\
&\Leftrightarrow c = b = 0 = d = g \qquad i = e \qquad f = -h \\
&\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & -h \\ g & h & e \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow M = aA + eB + hC
\end{aligned}$$

$$\boxed{\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}); CM = MC\} = \mathscr{F}}$$

4. Les 4 équations $0 = 0$ n'ont pas été écrites

7. a) On calcule

$$A^2 = A \qquad B^2 = B \quad C^2 = -B \quad AB = 0 = BA \quad AC = 0 = CA \quad BC = CB = C$$

Comme les matrices commutent.

$$\begin{aligned}(aA + bB + cC)^2 &= a^2A^2 + b^2B^2 + c^2C^2 + 2abAB + 2acAC + 2bcBC \\ &= a^2A + (b^2 - c^2)B + 2bcC \\ &= \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 - c^2 & -2bc \\ 0 & 2bc & b^2 - c^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\boxed{(aA + bB + cC)^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 - c^2 & -2bc \\ 0 & 2bc & b^2 - c^2 \end{pmatrix}}$$

On doit chercher a b et c qui vérifient

$$\begin{cases} a^2 & = 4 \\ b^2 - c^2 & = 5 \\ 2bc & = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 & = 4 \\ b^2 - c^2 & = 5 \\ bc & = 6 \end{cases}$$

On propose (car l'énoncé ne demande qu'une solution) $a = 2$, $b = 3$ et $c = 2$

La matrice de g dans la base $\mathscr{B}$ vérifie

$$G = Mat_{\mathscr{B}}(g) = C^2 - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

On vérifie aisément que G est inversible et

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} = -I + \frac{1}{2}C$$

Donc en utilisnt la correspondance entre endomorphisme et matrice dans $\mathscr{B}$

b) $\boxed{g \text{ est inversible et } g^{-1} = -i + \frac{1}{2}f^2}$

Exercice 2 théorique

1. a) Soit $\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ alors

$$\phi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Comme les x_i sont tous réels, les x_i^2 sont tous réels.

$$\boxed{\text{Pour tout } \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n,\ \phi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) \geqslant 0.}$$

b) Supposons de plus que $\phi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 0$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$$

Une somme de nombre positifs ne peut être nulle que si tous ses termes sont nuls

$$\forall i \in [\![1,\ n]\!] \qquad x_i^2 = 0$$

ce qui démontre

$$\forall i \in [\![1,\ n]\!] \qquad x_i = 0$$

$$\boxed{\text{Pour tout } \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n,\ \phi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 0 \text{ ssi } \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}.}$$

c) Soit $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ (fixé), si on suppose vérifié

$$\forall \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n \qquad \phi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 0$$

On a notamment pour $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{y}$

$$\phi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 0$$

ce qui d'après la question précédente donne $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$

$$\boxed{\text{Si pour tout } \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n,\ \phi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 0 \text{ alors } \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}.}$$

2. a) Soit $\overrightarrow{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ (fixé) et soit $\overrightarrow{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ et $\overrightarrow{y'} = (y'_1, \ldots, y'_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et λ un réel

$$\begin{aligned}
\psi_{\overrightarrow{x}}\left(\overrightarrow{y} + \lambda \overrightarrow{y'}\right) &= \sum_{i=1}^{n} x_i(y_i + \lambda y'_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i + \lambda x_i y'_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i y'_i \\
&= \psi_{\overrightarrow{x}}\left(\overrightarrow{y}\right) + \lambda \psi_{\overrightarrow{x}}\left(\overrightarrow{y}'\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\psi_{\overrightarrow{x}} \text{ est une application linéaire.}}$$

b) Soit $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$, $\psi_{\overrightarrow{x}}$ est une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc

$$\operatorname{Im} \psi_{\overrightarrow{x}} \subset \mathbb{R}$$

ce qui démontre que

$$\operatorname{Im} \psi_{\overrightarrow{x}} = \{\overrightarrow{0}\} \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{Im} \psi_{\overrightarrow{x}} = \mathbb{R}$$

cas $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ Alors $\psi_{\overrightarrow{x}}$ est l'application nulle

$$\boxed{\text{Si } \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}, \text{ alors } \psi_{\overrightarrow{x}} \text{ est de rang 0 et son noyau est de dimension } n.}$$

cas $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$ Alors $\psi_{\overrightarrow{x}}(\overrightarrow{x})$ est non nul (questions précédentes) donc $\operatorname{im} \psi_{\overrightarrow{x}} \neq \{\overrightarrow{0}\}$ ce qui démontre

$$\operatorname{im} \psi_{\overrightarrow{x}} = \mathbb{R}$$

Le théorème du rang affirme

$$\operatorname{Dim} \ker \psi_{\overrightarrow{x}} + \operatorname{Dim} \operatorname{im} \psi_{\overrightarrow{x}} = \operatorname{Dim} \mathbb{R}^n +$$

$$\boxed{\text{Si } \overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}, \text{ alors } \psi_{\overrightarrow{x}} \text{ est de rang 1 et son noyau est de dimension } n-1.}$$

c) On sait que $\psi_{\overrightarrow{x}} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$
Soit $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{x'} \in \mathbb{R}^n$ et λ un réel. Soit $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
&\psi_{\overrightarrow{x}+\lambda\overrightarrow{x'}}(\overrightarrow{y}) \\
&= \phi(\overrightarrow{x} + \lambda\overrightarrow{x'}, \overrightarrow{y}) \\
&= \phi(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x} + \lambda\overrightarrow{x'}) \\
&= \phi(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x}) + \lambda\phi(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x'}) \text{ question 2a} \\
&= \phi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y},) + \lambda\phi(\overrightarrow{x'}, \overrightarrow{y}) \\
&= \psi_{\overrightarrow{x}}(\overrightarrow{y}) + \lambda\psi_{\overrightarrow{x'}}(\overrightarrow{y}) \\
&= (\psi_{\overrightarrow{x}} + \lambda\psi_{\overrightarrow{x'}})(\overrightarrow{y})(\overrightarrow{y})
\end{aligned}$$

Comme on a fait un calcul pour un vecteur $\overrightarrow{y}$ quelconque

$$\psi_{\overrightarrow{x}+\lambda\overrightarrow{x'}} = \psi_{\overrightarrow{x}} + \lambda\psi_{\overrightarrow{x'}}$$

$$\boxed{f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))}$$

Comme $\dim \mathbb{R}^n = n = \dim \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, il suffit de démontré que f est injective.
Soit $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{x} \in \ker f &\iff f(\overrightarrow{x}) = 0 && \text{fonction nulle} \\
&\iff \forall \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n \qquad \phi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 0 \\
&\iff \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} && \text{question 1c}
\end{aligned}$$

Ce qui démontre que f injectif et donc avec un argument de dimension

$$\boxed{f \text{ est un isomorphisme d'espace vectoriel.}}$$

3. On a $A \cap B \subset A$ et ces deux ensembles ont même cardinal donc sont égaux

$$A \cap B = A$$

de même

$$A \cap B = B$$

$$\boxed{A = B.}$$

On a $S_j \cap S_i \subset S_j$ pour un entier i différent de j
donc

$$\operatorname{Card}(S_j \cap S_i) \leqslant \operatorname{Card}(S_j)$$

4. $\boxed{\text{Pour tout } j \text{ dans } \{1, \ldots, m\}, \operatorname{Car}(S_j) \geqslant \ell.}$

5. Un calcul immédiat donne

$$\boxed{\ell = 1 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

6. On constate que $\phi(\overrightarrow{x_i}, \overrightarrow{x_i}) = \operatorname{Card}(S_i, S_j)$ et en utilisant les hypothèses de l'énoncé et le résultat de la question précédent on démontre le résultat demandé.

7. a) La famille $(\overrightarrow{x_1},\dots,\overrightarrow{x_m})$ contient m vecteurs et $\dim \mathbb{R}^n = n < m$

$$\boxed{\text{La famille } (\overrightarrow{x_1},\dots,\overrightarrow{x_m}) \text{ est liée.}}$$

b) On a

$$\begin{aligned}
0 &= \phi(\overrightarrow{0},\overrightarrow{0}) \\
&= \phi\left(\sum_{i=1}^m r_i\overrightarrow{x_i}, \sum_{j=1}^m r_j\overrightarrow{x_j}\right) \\
&= \sum_{j=1}^m r_j\phi\left(\sum_{i=1}^m r_i\overrightarrow{x_i}, \overrightarrow{x_j}\right) && \text{question 2a} \\
&= \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m r_ir_j\phi\left(\overrightarrow{x_i},\overrightarrow{x_j}\right) && \text{question 2c} \\
&= \sum_{i=1}^m r_ir_i\phi\left(\overrightarrow{x_i},\overrightarrow{x_i}\right) + \sum_{i=1}^m\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^m r_ir_j\phi\left(\overrightarrow{x_i},\overrightarrow{x_j}\right) \\
&= \sum_{i=1}^m r_ir_i\phi\left(\overrightarrow{x_i},\overrightarrow{x_i}\right) + 2\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant m} r_ir_j\phi\left(\overrightarrow{x_i},\overrightarrow{x_j}\right) && \text{car } \phi\left(\overrightarrow{x_i},\overrightarrow{x_j}\right) = \phi\left(\overrightarrow{x_j},\overrightarrow{x_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^m r_ir_i\phi\left(\overrightarrow{x_i},\overrightarrow{x_i}\right) + 2\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant m} r_ir_j\ell && \text{question précédente}
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\sum_{j=1}^m r_j^2\phi\left(\overrightarrow{x_j},\overrightarrow{x_j}\right) + 2\ell\sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant m} r_ir_k = 0}$$

c) Il faut constater que

$$\left(\sum_{j=1}^m x_j\right)^2 = \sum_{j=1}^m r_j^2 + 2\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant m} r_jr_k$$

donc

$$\left(\sum_{j=1}^m x_j\right)^2 - \sum_{j=1}^m r_j^2 = 2\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant m} r_jr_k$$

ce qui permet de démontrer le résultat démandé

d) On peut affiner le résultat de la question6 en remarquant que $\phi(\overrightarrow{x_j},\overrightarrow{x_j}) = \ell$ uniquement dans le cas $\mathrm{Card}(S_j) = \ell$. Si il existe deux entiers j_1 et j_2 tels que $\mathrm{Card}(S_{j_1}) = \ell = \mathrm{Card}(S_{j_2})$ alors la question 3 et l'hypothèse que tous les S_j) sont différents deux à deux permet de conclure que j_1 et j_2 sont identique. Il existe au plus un ensemble S_j de cardinal égal à ℓ donc tous les termes $\phi(\overrightarrow{x_k},\overrightarrow{x_j}) - \ell$ sont strictement positifs sauf au plus l'un d'entre eux.

$$\sum_{j=1}^m r_j^2\left(\phi\left(\overrightarrow{x_j},\overrightarrow{x_j}\right) - \ell\right) + \ell\left(\sum_{j=1}^m r_j\right)^2 = 0.$$

Comme $\ell > 0$ et que $\sum_{j=1}^m r_j^2\left(\phi\left(\overrightarrow{x_j},\overrightarrow{x_j}\right) - \ell\right) \leqslant 0$ on obtient

$$\sum_{j=1}^m r_j^2\left(\phi\left(\overrightarrow{x_j},\overrightarrow{x_j}\right) - \ell\right) = 0$$

Donc comme tous les termes sont positifs

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\} \qquad r_j^2 \left(\phi\left(\overrightarrow{x_j}, \overrightarrow{x_j}\right) - \ell\right) = 0$$

et avec la remarque précédente tous les r_j sont nuls sauf au plus 1. Supposons, sans perdre de généralité que r_1 est non nul et que les autres réels sont nuls alors

$$r_1\overrightarrow{x_1} + r_2\overrightarrow{x_2} + \cdots + r_m\overrightarrow{x_m} = \overrightarrow{0}$$

devient

$$r_1\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{0}$$

et comme $\overrightarrow{x_1} \neq \overrightarrow{0}$ ceci impose $r_1 = 0$
Tous les coefficients r_j sont nuls ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que la famille $(\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_m})$ est liée.