Filière BCPST
MATHÉMATIQUES

Épreuve commune aux ENS de Paris, Lyon et Cachan

Session 2023

Réponses

Remarque

Rédaction de ce document

Ce document à été écrit en utilisant les éléments de correction que l'on trouve dans le rapport de jury rédigé par Amic Frouvelle. Les parties en italiques sont des remarques présentes dans le rapport. Vous pouvez trouver le rapport original à l'adresse `https://www.ens.psl.eu/rapports-et-sujets-2023-bcpst`. À partir de III.3.a les réponses sont directement celles du rapport.

Commentaire du correcteur

Le sujet était assez long. La première partie consistait à étudier le nombre de dérangements de n éléments, et permettait d'obtenir une formule exacte et un équivalent asymptotique. Le tout via des polynômes, une équation différentielle, des calculs de combinatoire. La deuxième partie, plus courte, permettait d'étudier un algorithme de simulation de tirage uniforme de dérangements par une méthode de rejet. La troisième partie, plus longue et plus difficile, étudiait un algorithme de rejet plus évolué basé sur la décomposition en produit de cycles d'une permutation. Il y avait enfin une dernière partie très courte d'ouverture.

Le niveau et le style des copies était très varié. Certaines copies ne contenaient que les réponses aux questions les plus faciles dans toutes les parties, d'autres n'ont traité que les deux premières parties. En traitant parfaitement les questions de l'introduction, de la partie I, et la question 1 de la partie II, il était possible d'obtenir la note maximale de 20/20 (c'était le cas pour une copie). Trois copies sont allées au-delà de la note maximale. À part les questions 3.b. et 3.c. de la partie III et les questions d'ouverture de la partie IV, chaque question a été traitée parfaitement dans au moins quelques copies. L'introduction et la partie I ont été les plus traitées, mais la plupart des questions des parties II et III ont été abordées dans plus de la moitié des copies.

Introduction

(a)

- $3! = 6$ cycles de longueur 4
  - $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$
  - $1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 1$
  - $1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 1$
  - $1 \to 3 \to 4 \to 2 \to 1$
  - $1 \to 4 \to 2 \to 3 \to 1$
  - $1 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$

  attention
- $2 \to 3 \to 4 \to 1 \to 2$ est la même permutation que la première!
- trois doubles transpositions).
  - $1 \longleftrightarrow 2$, $3 \longleftrightarrow 4$
  - $1 \longleftrightarrow 3$, $2 \longleftrightarrow 4$
  - $1 \longleftrightarrow 4$, $2 \longleftrightarrow 3$

Si il y a un cycle de longueur trois, l'entier hors du cycle est un point fixe

$$\boxed{d_4 = 9}$$

Réussi dans les deux tiers des copies, un quart des copies oubliant les doubles transpositions - malgré l'exemple donné pour 9 personnes où on voit la possibilité de cycles de longueur deux. Quelques copies avec des erreurs de comptage doublons ou oubli.

(b) La probabilité vaut $\frac{1}{12}$: $1 \to 3$ avec proba $\frac{1}{3}$ (choix parmi $\{2,3,4\}$), puis $2 \to 4$ avec proba $n = 4$ (choix parmi $\{1,4\}$), enfin $3 \to 2$ avec proba $\frac{1}{2}$ (choix parmi $\{1,2\}$). Si le tirage était uniforme la probabilité serait $\frac{1}{d_4} = \frac{1}{9}$.
Réussi dans les deux tiers des copies, le tiers restant étant partagé entre des copies n'ayant vraiment pas compris la procédure, ou simplement mal calculé les différentes probabilités.

Partie I

1. (a) La fonction $t \mapsto \dfrac{t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, en utilisant le théorème fondamental de l'analyse, on sait que la fonction

$$\varphi : x \mapsto \int_0^x \frac{t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour x réel $\varphi'(x) = \dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_n'(x) = f_n(x) + \frac{x^n}{n!} \qquad P_n'(x) = P_{n-1}(x)$$

$$\boxed{\left(P_n + f_n\right)' = P_n + f_n}$$

Cette équation à pour solution $P_n + f_n\ : x \mapsto C\mathrm{e}^x$ où C est une constante
La condition initiale est $P_n(0) = 1$ et $f_n(0) = 0$.

$$\boxed{\text{Pour } x \text{ réel } P_n + f_n(x) = \mathrm{e}^x}$$

Seulement un quart des copies a utilisé la condition initiale, un gros tiers a résolu l'équation générique, une bonne partie des copies ayant eu du mal à voir la dérivée de f_n comme une simple dérivée d'un produit.

(b) Soit $x \in [0;1]$, les quantités manipulées étant positives

$$\forall t \in [0;x] \qquad \frac{t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t} \leqslant \frac{t^n}{n!}$$

donc par croissance de l'intégrale

$$\int_0^x \frac{t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$|f_n(x)| = f_n(x) \leqslant \mathrm{e}^x \int_0^x \frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1} x^{n+1}$$

Soit $x \in [-1;1]$

$$\begin{aligned}
|f_n(x)| &\leqslant \mathrm{e}^x \int_x^0 \left|\frac{t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}\right|\mathrm{d}t \\
&\leqslant \mathrm{e}^0 \int_x^0 \frac{|t|^n}{n!}\mathrm{e}^0\,\mathrm{d}t && \text{croissance et positivité de exp et de l'intégrale} \\
&\leqslant \int_x^0 \frac{(-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant (-x)^{n+1}(n+1)! \\
&\leqslant \frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1} \\
&\leqslant \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!}|x|^{n+1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in [-1;1], \qquad |f_n(x)| \leqslant C|x|^{n+1} \text{ où } C = \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!}}$$

La quantité C dépend de n qui est fixé dans cette question et ne dépend pas de x, on a donc bienrépondu à la question.

Globalement peu réussi, avec des erreurs de signe pour le cas $x \leqslant 0$, et d'autres copies ne traitant simplement pas la question.

(c) Supposons que Q ne vérifie par

$$\forall k \in [\![0,n]\!] \qquad a_k = 0$$

, au moins l'un des indice a_k pour $k \in [\![0,n]\!]$ est non nul. En notant $k_0 \in [\![0,n]\!]$ le plus petit des indices k tel que $a_k \neq 0$, on obtient

$$\frac{Q(x)}{x^{k_0}} \sim_{x\to 0} a_{k_0}$$

donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{Q(x)}{x^{k_0}} = a_{k_0} \neq 0$$

En utilisant l'hypothèse

$$\forall x \in [-1;1] \qquad 0 \leqslant \left|\frac{Q(x)}{x^{k_0}}\right| \leqslant C|x|^{n-k_0+1}$$

et comme $k_0 \leqslant n$.

$$\lim |x|^{n-k_0+1} = 0$$

ce qui entraîne

$$\lim_{x\to 0} \frac{Q(x)}{x^{k_0}} = 0$$

D'où la contradiction.

Bien réussi dans la moitié des copies, quelques copies pas loin du résultat.

(d) En notant $Q_n(x) = P_n(x)P_n(-x) - 1$ (un polynôme de degré $2n$), on obtient pour $x \in [-1;1]$,

$$\begin{aligned}
|Q_n(x)| &= \left|\left(\mathrm{e}^x - f_n(x)\right)\left(\mathrm{e}^{-x} - f_n(-x)\right) - 1\right| && \text{question I.1.a}\\
&= \left|\mathrm{e}^x f_n(-x) + \mathrm{e}^{-x} f_n(x) + f_n(x) f_n(-x)\right| \\
&\leqslant e^x \left|f_n(x)\right| + \mathrm{e}^{-x}\left|f_n(-x)\right| + \left|f_n(x)\right|\left|f_n(-x)\right| \\
&\leqslant (1+\mathrm{e})C|x|^{n+1} + C^2\left|x^{2n+2}\right| && \text{question I.1.b et exp bornée sur } [-1;1]\\
&\leqslant \widetilde{C}|x|^{n+1} && \text{car } x \in [-1;1] \text{ donc } \left|x^{2n+2}\right| \leqslant \left|x^{n+1}\right|
\end{aligned}$$

En utilisant la question précédente Q_n a ses n premiers coefficients nuls, il est bien de la forme $x^{n+1}R_n(x)$ où R_n est un polynôme de degré au plus $n-1$

C'était une question un peu plus difficile qui nécessitait d'avoir le bon résultat à la question 1.a, la moitié des copies ne l'ont pas traitée, ***seules 3 copies*** *l'ont parfaitement réussie.*

2. (a) On sait que $\mathrm{Card}(S_n) = n!$, et la probabilité étant uniforme donc

$$\boxed{p_{0,n} = \frac{\mathrm{Card}(S_{0,n})}{\mathrm{Card}(S_n)} = \frac{d_n}{n!}}$$

Question réussie dans toutes les copies [corrigées].

(b) Un élément de $T_{\mathscr{I}}$ revient à faire une permutation sans point fixe de $E = [\![1,n]\!] \setminus \mathscr{I}$ et E est de cardinal $n-k$.

$$\boxed{\mathrm{Card}(T_{\mathscr{I}}) = \mathrm{Card}\left(S_{0,n-k}\right) = d_{n-k}.}$$

Étonnamment, question réussie seulement dans un tiers des copies, la moitié donnant un résultat complètement insensé.

(c) Les $T_{\mathscr{I}}$ pour I parcourant les sous ensembles de cardinal k de $[\![1,n]\!]$ sont disjoints, donc

$$\mathrm{Card}\left(S_{k,n}\right) = \sum_{\mathscr{I} \text{ de cardinal } k} \mathrm{Card}(T_{\mathscr{I}}) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{choix des } k \text{ éléments de } \mathscr{I}} \mathrm{Card}\left(S_{0,n-k}\right)$$

.
Si $k = n$ il y a une seule permutation avec n points fixe, l' identité et l'égalité précédente s'écrit en utilisant les conventions de l'énoncé

$$\operatorname{Card}\left(S_{k,n}\right) = \binom{n}{n} d_0 = 1 \times 1$$

Si $k = 0$ l'égalité précédente s'écrit

$$d_n = \binom{n}{0} d_n$$

Donc

$$\begin{aligned} p_{k,n} &= \frac{\operatorname{Card}\left(S_{k,n}\right)}{n!} \\ &= \frac{d_{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{1}{k!} p_{0,n-k} && \text{question 2a} \end{aligned}$$

La somme de ces probabilités ($(S_k, n)_{k \in [\![0,n]\!]}$ formant une partition) vaut 1 ce qui donne le résultat voulu.
Réussite mitigée sur cette question, une partie des copies refaisant la question précédente si elle était mal traitée, ou arnaquant le résultat pour obtenir la probabilité voulue; la plupart expliquant toutefois correctement le fait que la somme des probabilités vaut un.

3. (a) G_n est un polynôme de degré au plus $2n$. On note $G_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k$, la formule sur le produit de deux polynçomes

$$a_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{d_{k-i}}{i!(k_i)!}$$

.
D'après la question précédente, pour
$k \leqslant n$ on a $a_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{d_{k-i}}{!(k-i)!} = 1$.
Et pour $k > n$, on obtient en utilisant le fait que les coefficients de G_n sont nuls à partir du degré $n+1$ et que tous lkes termes sont positifs.

$$0 \leqslant a_k = \sum_{i=k-n}^{n} \frac{d_{k-i}}{i!(k-i)!} \leqslant \sum_{i=0}^{k} \frac{d_{k-i}}{i!(k-i)!} = 1$$

$$\boxed{\text{Les coefficients de degré plus petit que } n \text{ valent 1, les autres sont plus petits que 1.}}$$

Très peu de copies (10%) ont bien réussi à donner la bonne expression selon que $k \leqslant n$ ou $k > n$, mais un tiers des copies contient un résultat correct pour $k \leqslant n$.

(b) Pour $x \in [-1;1]$

$$\begin{aligned} P_n(-x)G_n(x) &= P_n(x)P_n(-x)D_n(x) \\ &= (1+x^{n+1}R_n(x))D_n(x) && \text{question 1d} \end{aligned}$$

En utilisant le résultat de la question précédente, le coefficients de degré n de $P_n(-x)G_n(x)$ vaut

$$\sum_{k=0}^{n} 1 \frac{(-1)^k}{k!}$$

En identifiant les coefficients de degrés n dans $P_n(-x)G_n(x)$ et

$$(1+x^{n+1}R_n(x))D_n(x)$$

on montre que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = d_n}$$

Réponse correcte dans seulement ***une petite dizaine de copies****, alors que tous les résultats nécessaires pour résoudre cette question étaient donnés.*

(c) Soit $x \in]-1;1[$. On a $G_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k + \sum_{k=n+1}^{2n} a_{k,n} x^k$ où les $a_{k,n}$ sont dans $[0;1]$.
On sait que la limite de la première somme est $\frac{1}{1-x}$ (série géométrique, pour $|x| < 1$). Pour montrer que la deuxième somme tend vers 0 , on a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{2n} a_{k,n} x_k \right| &\leqslant |x|^{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} \left| a_{n+1+i,n} \right| |x|^i \\ &\leqslant |x|^{n+1} \sum_{i=0}^{+\infty} |x|^i = \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \end{aligned}$$

Et comme $|x| < 1$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} = 0$$

Le théorème des gendarmes donne

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} G_n(x) = \frac{1}{1-x}}$$

De plus, en reconnaissant une série exponentielle

$$\lim_{n \to +\infty} P_n(x) = \mathrm{e}^x$$

Par produit,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} D_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}}$$

Une question très peu réussie (mais également très peu traitée, et pas du tout essentielle pour la suite). Les copies qui la traitent reconnaissent les séries géométriques et exponentielles, mais le traitement de la partie de $G_n(x)$ pour $k > n$ n'a été fait que dans un très petit nombre de copies.

4. (a) Le résultat I.2.c donne

$$\boxed{p_{k-1,n-1} = kp_{k,n}}$$

X_n étant à valeurs dans $[\![0,\, n]\!]$, elle admet une espérance

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &= \sum_{k=0}^{n} kp_{k,n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} p_{k-1,n-1} && \text{remarque précédente} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} p_{k,n-1} && \text{changement d'indice} \\
&= 1 && X_{n_1} \text{ est à valeurs dans } [\![0,\, n-1]\!]
\end{aligned}$$

$$\boxed{X_n \text{ admet une espérance qui vaut 1.}}$$

Question plutôt bien réussie, dans plus des deux-tiers des copies qui la traitent

(b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_n\left(X_n-1\right)\right] &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\, p_{k,n} && \text{théorème de transfert, somme finie} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (k-1)\, p_{k-1,n-1} && \text{question I.2.c} \\
&= \sum_{k=2}^{n-1} (k-1)\, p_{k-1,n-1} && \text{terme nul} \\
&= \sum_{k\geqslant 2} p_{k-2,n-2} && \text{question I.2.c} \\
&= 1 && \text{car } X_{n_2} \text{ est à valeurs dans } [\![0,\, n-2]\!]
\end{aligned}$$

Par linéarité de l'espérance on a

$$\mathbb{E}\left[X_n\left(X_n-1\right)\right] = \mathbb{E}\left[X_n^2\right] - \mathbb{E}\left[X_n\right]$$

donc

$$\mathbb{E}\left[X_n^2\right] = 2$$

et par la formule de König-Huygens, on obtient

$$\mathrm{Var}\left(X_n\right) = 1.$$

Question réussie dans la moitié des copies la traitant. Dans une bonne partie des copies où le calcul par transfert n'aboutit pas, la linéarité de l'espérance et la formule de König-Huygens sont bien utilisées.

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} p_{0,n} &= \frac{d_n}{n!} && \text{question 2.a} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} && \text{question 3.b} \end{aligned}$$

On reconnaît alors la somme partielle d'une série exponentielle

$$\boxed{p_0 = \mathrm{e}^{-1}}$$

Relativement bien réussie.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$ plus grand que k
La question 2.c donne

$$p_{k,n} = \frac{d_{n-k}}{k!}$$

donc

$$p_k = \lim_{n \to +\infty} p_{n,k} = \frac{p_0}{k!} = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}$$

$$\boxed{p_k = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!}}$$

Relativement bien réussie également.

(c) . On reconnaît une loi de Poisson de paramètre 1 dont l' espérance et la variance valent 1.
Très bien réussie lorsque traitée, quelques réponses farfelues.

PARTIE II

1. (a) Lors de l'itération j on échange j avec un élément plus petit. Donc avant de compléter l'itération i les éléments d'indice k pour k plus grand que i n'ont jamais été modifiés

$$\boxed{\text{Avant cet échange, pour } k \in [\![i, n]\!], \sigma[k] = k}$$

Avant le dernier échange $\sigma[n]$ n'a pas été modifié et vaut n. On échange n avec j_n et l'algorithme s'arrête.

$$\boxed{\varphi(j_n) = n}$$

Comme φ est une bijection

$$\boxed{j_n = \varphi^{-1}(n)}$$

En pratique φ étant donnée par une liste, il faut aller chercher l'indice de l'élémént de la liste dont la valeur est n
Question à moitié réussie, la clarté de la rédaction en français fait parfois défaut.

(b) Pour retrouver $\widetilde{\varphi}$ il faut annuler le dernier échange effectué dans l'algorithme. pour cela il faut échanger j_n (que l'on connaît) et n dans la liste φ.

Comme précédemment,

$$j_{n-1} = \widetilde{\varphi}^{-1}(n-1)$$

Comme on connaît j_n à partir de φ, on obtient donc $\widetilde{\varphi}$ à partir de φ seulement, et donc j_{n-1} à partir de φ.

Question finalement mieux réussie que la précédente, la rédaction de cette question montrant parfois que la précédente était comprise mais très mal rédigée.

(c) On vient de prouver partiellement puis d'admettre que si on connaît $\Phi(j_1,\ldots,j_n)$ on pouvait calculer $(j_1,\ldots,j_n)$ On a donc montré que si φ est dans l'image de Φ, alors il n'y a qu'un antécédent $\left(j_2,\ldots,j_n\right)$ par Φ.

$$\boxed{\Phi \text{ est une application injective}}$$

L'ensemble de départ de Φ est de cardinal $2\times 3\times\cdots\times n$ et S_n est de cardinal $n!$ Les ensembles de départ et d'arrivée sont donc de même cardinal.

$$\boxed{\Phi \text{ est une application bijective}}$$

Remarque, le théorème utilisé, "naturel", ne semble pas être présent dans le programme officiel.

Une question très peu réussie, on sent que les concepts d'injectivité et de surjectivité ne sont pas complètement compris. Quelques copies n'ont pas utilisé ce qui précède et ont tenté de montrer la surjectivité à la main, parfois avec succès... puis utilisé le cardinal pour obtenir l'injectivité!

(d) On note $\left(j_2,\ldots,j_n\right) = \Phi^{-1}(\varphi)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\Phi(J_2,\ldots,J_n)=\varphi\right) &= \mathbb{P}\left(\Phi(J_2,\ldots,J_n)=\Phi\left(j_2,\ldots,j_n\right)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left(J_2=j_2\right)\cap\ldots\cap\left(J_n=j_n\right)\right) && \text{car } \Phi \text{ est bijective} \\
&= \mathbb{P}\left(J_2=j_2\right)\times\cdots\times\mathbb{P}\left(J_n=j_n\right) && \text{indépendance de} J_1,\ldots,J_n \\
&= \frac{1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n} && \text{lois uniforme des } J_i \\
&= \frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{P}\left[\Phi(J_2,\ldots,J_n)=\varphi\right] = \frac{1}{n!} = \frac{1}{\text{CardS}}$,

$\boxed{\text{Le choix de la permutation se fait selon une loi loi uniforme sur } S_n}$.

Chaque appel à la fonction `PermAlea` utilise $n-1$ fois la fonction Unif (une fois pour chaque passage dans la boucle).

Question plutôt réussie, même si parfois la rédaction n'était pas très claire.

2. (a) On a $Z_n \geqslant k$ si et seulement les $k-1$ premiers appels de la fonction `PermAlea` ont donné une permutation n'étant pas dans $S_{0,n}$. Ce sont des événements successifs indépendants, ayant chacun pour probabilité $1-p_{0,n}$.

Donc

$$\boxed{\mathbb{P}\left(Z_n \geqslant k\right) = \left(1 - p_{0,n}\right)^{k-1}}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_n = k) &= \mathbb{P}(Z_n \geqslant k) - \mathbb{P}(Z_n \geqslant k+1)\\ &= \left(1 - p_{0,n}\right)^{k-1} - \left(1 - p_{0,n}\right)^{k}\\ &= \left(1 - p_{0,n}\right)^{k-1}\left(1 - \left(1 - p_{0,n}\right)\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{Z_n \text{ suit une loi géométrique de paramètre } p_{0,n}, \text{ d'espérance } \tfrac{1}{p_{0,n}}.}$$

il fallait ici supposer que $n \geqslant 2$, pour s'assurer que $p_{0,n} \neq 0$, c'était une petite imprécision de l'énoncé).

D'après les propriétés de la loi exponentielle

$$\boxed{\mathbb{P}(Z_n = \infty) = 0}$$

remarque si $n = 1$ `PermAlea` renvoi la liste `[1]` et la fonction `PermAleaRejet` ne s'arrête jamais, ce qui n'est pas étonnant car $S_0, 1 = \emptyset$

Question bien réussie, beaucoup de copies reconnaissent le cours sur les expériences de Bernoulli successives indépendantes. L'erreur la plus fréquente étant de montrer que $\mathbb{P}\left(Z_n = k\right) \to 0$ puis de vouloir en déduire $\mathbb{P}\left(Z_n = \infty\right) = 0$.

(b) À chaque appel de `PermAlea` on effectue (n_1) appels à `Unifs`

$$u_n = Z_n \cdot (n-1)$$

Donc

$$\mathbb{E}\left[u_n\right] = (n-1)\mathbb{E}(Z_n) \qquad \text{linéarité de}\mathbb{E}$$

$$= \frac{n_1}{p_0} \qquad \text{loi géométrique}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(u_n) \sim_{n \to +\infty} \frac{n}{p_0}}$$

Question bien réussie. L'énoncé sous la forme "nombre moyen d'appels» a quelquefois été perturbant, certaines copies parlant ici de loi des grands nombres pour justifier qu'on voulait effectivement calculer l'espérance de u_n.

(c) Soit A l'événement «la permutation renvoyée lors de l'appel de `PermAleaRejet ( n )` est égale à φ ».

On considère le système complet d'événements $(Z_n = k)_{k \in \mathbb{N}^*}$. L'événement $A \cap (Z_n = k)$ correspond au cas où la fonction PermAlea(n) renvoie $(k-1)$ fois une permutation n'étant pas dans $S_{0,n}$ (ce qui se produit avec probabilité $\left(1 - p_{0,n}\right)$ indépendamment à chaque fois) puis qu'au k-ième appel, la fonction `PermAlea(n)` renvoie φ (ce qui se produit avec probabilité $\frac{1}{n!}$ d'après II.1.d). Par la formule des probabilités totales, on obtient donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(A \cap (Z_n = k)\right) && \text{proba totales} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(1 - p_{0,n}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{n!} \\
&= \frac{1}{p_{0,n}} \cdot \frac{1}{n!} && \text{série géométrique} \\
&= \frac{1}{d_n} && \text{Question I.2.a} \\
&= \frac{1}{\mathrm{Card}\left(S_{0,n}\right)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien donc la loi d'un tirage aléatoire uniforme dans } S_{0,n}.}$$

*Question très rarement réussie (réponse complète dans seulement **deux copies**) et traitée dans moins de la moitié des copies.*

Partie III

1. (a) Une permutation telle que $(a_1, a_2, \ldots, a_\ell)$ soit un cycle (avec $(a_1, \ldots, a_\ell)$ fixés) est entièrement déterminée par l'image des éléments de $[\![1, n]\!] \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_\ell\}$, l'image de ses points ne peuvent pas appartenir à $\{a_1, a_2, \ldots, a_\ell\}$,en effet si par exemple $\sigma(x) = a_2$ alors $x = a_2$.

   Une telle permutation est donc entièrement déterminée par sa restriction à $[\![1, n]\!] \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_\ell\}$ restriction qui forme une permutation de cet ensemble.

   $$\boxed{\mathrm{Card}(A_{a_1,\ldots,a_\ell} = (n-\ell)!}$$

   Bonne réponse dans un quart des copies. Dans beaucoup de copies, il n'était pas clair que les $a_2, \ldots, a_\ell$ étaient donnés, ce qui a donné lieu à de multiples réponses.

   (b) On doit calculer $\mathrm{Card}([L_1 = \ell])$.

   - On commence par choisir avec ordre et sans répétition $(a_2, \ldots a_\ell)$ dans $[\![1, n]\!] \setminus \{a_1\}$ c'est un arrangement de longueur $\ell - 1$ dans un ensemble à $n-1$ éléments, il y a $(n-1) \times (n-2) \times \cdots (n-\ell+1) = \dfrac{(n-1)!}{(n-\ell)!}$
   - Puis on choisit le reste de la permutation, d'après la question précédente, on a alors $(n-\ell)!$ possibilités.
   - Par principe multiplicatif :

   $$\mathrm{Card}([L_1 = \ell]) = \frac{(n-1)!}{(n-\ell)!}(n-\ell)! = (n-1)!$$

   Comme le choix de la permutation se fait selon une loi uniforme

$$\mathbb{P}(L_1 = \ell) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(L_1 = \ell) = \tfrac{1}{n}}$$

Si $\ell = 1$, on compte les permutations telles que $\sigma(a_1) = a_1$, ce qui correspond aux permutations de $[\![1, n]\!] \setminus \{a_1\}$ il y en a $(n-1)!$ et la suite du raisonnement est identique.

Question très rarement réussie (6 copies), beaucoup de raisonnement très verbeux et peu convaincants, il y a même un nombre conséquents de copies dans lesquelles il y avait «L'image de L_1 est $[\![1, n]\!]$, on a donc une loi uniforme».

(c) Soit $\tilde{\ell} \in [\![2, n-\ell]\!]$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{C_{a_1,\dots,a_\ell}}(L_2 = \tilde{\ell}) &= \frac{\mathbb{P}\left(C_{a_1,\dots,a_\ell} \cap [L_2 = \tilde{\ell}]\right)}{\mathbb{P}(C_{a_1,\dots,a_\ell})} \\
&= \frac{\dfrac{\operatorname{Card}\left(C_{a_1,\dots,a_\ell} \cap [L_2 = \tilde{\ell}]\right)}{\operatorname{Card}(S_n)}}{\dfrac{\operatorname{Card}(C_{a_1,\dots,a_\ell})}{\operatorname{Card}(S_n)}} && \text{équiprobabilité} \\
&= \frac{\operatorname{Card}\left(C_{a_1,\dots,a_\ell} \cap [L_2 = \tilde{\ell}]\right)}{\operatorname{Card}(C_{a_1,\dots,a_\ell})}
\end{aligned}$$

Or une permutation de $C_{a_1,\dots,a_\ell} \cap [L_2 = \tilde{\ell}]$ est déterminée par

- le choix du cycle de longueur $\tilde{\ell}$ commencant par $a_{\ell+1}$. Comme précédemment c'est un arrangement de $\tilde{\ell} - 1$ éléments parmi $[\![1, n]\!] \setminus \{a_1, \dots, a_\ell, a_{\ell+1}\}$: $\dfrac{(n-\ell-1)!}{(n-\ell-\tilde{\ell})!}$ possibilités
- une permutation de $[\![1, n]\!]$ privé de des ℓ éléments du premier cycle et des $\tilde{\ell}$ éléments du second cycle : $(n-\ell-\tilde{\ell})!$ possibilités
- Par principe multiplicatif

$$\operatorname{Card}\left(C_{a_1,\dots,a_\ell} \cap [L_2 = \tilde{\ell}]\right) = (n-\ell-1)!$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{C_{a_1,\dots,a_\ell}}(L_2 = \tilde{\ell}) &= \frac{(n-\ell-1)!}{(n-\ell)!} && \text{ce qui précède et III.1.a} \\
&= \frac{1}{n-\ell}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_{C_{a_1,\dots,a_\ell}}(L_2 = \tilde{\ell}) = \frac{1}{n-\ell}}$$

Le raisonnement est effectué pour $\tilde{\ell} > 1$ mais comme précédemment le résultat est valable pour $\tilde{\ell} = 1$

Question réussie dans une seule copie, des idées dans quelques-unes, comprenant qu'on pouvait raisonner comme précédemment. Question globalement peu traitée.

Remarque On constatera que l'énoncé n'utilise pas la notation au programme pour la probabilité conditionnelle.

2. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in [\![k, k+1]\!]$ on a

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$$

, par croissance de l'intégrale.

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}x$$

, donc

$$\boxed{\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}}$$

En sommant l'inégalité de gauche et utilisant la relation de Chasles,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \int_1^n \frac{1}{x}$$

donc après changement d'indice

$$h_n - 1 \leqslant \ln n$$

En sommant l'inégalité de droite

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant h_n$$

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leqslant h_n \leqslant 1 + \ln n}$$

Question classique de comparaison somme-intégrale, très bien réussie dans un grand nombre de copies (et dans la plupart de celles qui l'avaient traitée).

(b) L'événement $H_n = 1$ est réalisé si et seulement si Y_n n'a qu'un élément si et seulement si $U_n = n$, comme U_n suit une loi uniforme

$$\boxed{\mathbb{P}(H_n = 1) = \tfrac{1}{n}.}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ $(U_n = \ell)_{\ell \in [\![1, n]\!]}$ forment un système complet d'événement :

$$\mathbb{P}(H_n = k) = \sum_{\ell=1}^{n} \mathbb{P}((H_n = k) \cap (U_n = \ell))$$

$H_n = k] \cap [U_n = n] = \emptyset$ car si $U_n = n$ alors $H_n = 1$ et on est dans le cas $k > 1$.

Lorsque $\ell \geqslant 1$, l'événement $(H_n = k) \cap (U_n = \ell)$ correspond au fait que $U_n = \ell$ et que la liste tirée avec comme argument $n - \ell$ a $k - 1$ éléments, c'est à dire que

$$(H_n = k) \cap (U_n = \ell) = (H_{n-\ell} = k - 1) \cap (U_n = \ell)$$

Comme U_n et $Y_{n-\ell}$ sont indépendants, U_n et $H_{n-\ell}$ aussi, et donc

$$\mathbb{P}(H_n = k) = \sum_{\ell=1}^{n-1} \mathbb{P}(H_{n-\ell} = k-1) \cdot \mathbb{P}(U_n = \ell) = \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{n} \mathbb{P}(H_{n-\ell} = k-1)$$

Réussite mitigée. Si le cas $H_n = 1$ est bien compris, le cas $k > 1$ n'est résolu correctement que dans peu de copies, l'erreur la plus courante étant de prendre pour système d'événements les $(H_{n-\ell} = k-1)$ pour ℓ allant de 1 à $n-1$, ce qui n'a guère de sens.

(c)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[H_n] &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(H_n = k) \\
&= \mathbb{P}(H_n = 1) + \sum_{k=2}^{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{k}{n} \mathbb{P}(H_{n-\ell} = k-1) && \text{question précédente} \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)\mathbb{P}(H_{n-\ell} = k) && \text{changement d'indice} \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k\mathbb{P}(H_{n-\ell} = k) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(H_{n-\ell} = k) \right) \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} (\mathbb{E}[H_{n-\ell}] + 1) && \text{Si } \ell \in [\![1, n]\!],\ H_{n-\ell}(\Omega) \subset [\![1, n]\!] - \ell \subset [\![1, n-1]\!] \\
&= 1 + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} \mathbb{E}[H_{n-\ell}]
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}[H_n] = 1 + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} \mathbb{E}[H_{n-\ell}]}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[H_{n+1}] - \mathbb{E}[H_n] &= 1 + \frac{1}{n+1} \sum_{\ell=1}^{n} (\mathbb{E}[H_{n+1-\ell}]) - \mathbb{E}[H_n] && \text{résultat précédent} \\
&= 1 + \left(\frac{1}{n+1} - 1 \right) \mathbb{E}[H_n] + \frac{1}{n+1} \sum_{\ell=2}^{n} \mathbb{E}[H_{n+1-\ell}] \\
&= 1 + \frac{n}{n+1} \left(-\mathbb{E}[H_n] + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} \mathbb{E}[H_{n-\ell}] \right) && \text{changement d'indice} \\
&= 1 + \frac{n}{n+1} (-\mathbb{E}[H_n] + \mathbb{E}[H_n] - 1) && \text{résulatat précédent} \\
&= 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}[H_{n+1}] - \mathbb{E}[H_{n+1}] = \frac{1}{n+1}}$$

$\mathbb{E}[H_1] = 1$ car H_1 vaut quasi certainement 1.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[H_n] &= \mathbb{E}[H_1] + \sum_{k=1}^{n-1} (\mathbb{E}[H_{k+1}] - \mathbb{E}[H_k]) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{n-} \frac{1}{k} \\
&= h_n
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\mathbb{E}[H_n] = h_n}$$

En utilisant III.2.a

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leqslant \frac{h_n}{\ln n} \leqslant \frac{1}{\ln n} + 1$$

puis

$$\frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln n} \leqslant \frac{h_n}{\ln n} \leqslant \frac{1}{\ln n} + 1$$

donc

$$1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} \leqslant \frac{h_n}{\ln n} \leqslant \frac{1}{\ln n} + 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} + 1 = 1$$

Par encadrement

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}[H_n]}{\ln n} = 1$$

$$\boxed{\mathbb{E}[H_n] \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n.}$$

C'était une des questions les plus longues, et qui a été traitée inégalement. Dans le premier calcul, dans de nombreux cas, il a été oublié de séparer le cas $k = 1$ des autres, comme c'était pourtant indiqué au vu de la question précédente. Pour le calcul suivant plusieurs méthodes pouvaient fonctionner, comme utiliser la formule à la fois pour $\mathbb{E}[H_{n+1}]$ et $\mathbb{E}[H_n]$, puis de nouveau pour $\mathbb{E}[H_n]$ (le calcul était un peu fastidieux mais a été réussi dans les copies qui ne se perdaient pas dans les changements d'indice). Certaines copies ont intuité que la valeur de $\mathbb{E}[H_n]$ serait h_n et ont pu traiter la fin de la question. Il a été souvent utilisé, sans justification, le fait que $\ln(n+1) \sim \ln n$ pour conclure.

3. (a) *Remarque : il y avait une erreur d'énoncé ici, il fallait inverser le rôle de F_n et F_n^c dans la formule.*
Il s'agit de noter que l'appel de `LongueursCyclesAleaRejet (n)` est équivalent à l'appel une première fois de `LongueursCyclesAlea(n)` avec retour de `listeL` si elle n'a pas d'éléments égal à 1 (dans le cas de l'événement F_n^c), ou suivi d'un nouvel appel (indépendant) de `LongueursCyclesAleaRejet (n)` si `listeL` a au moins un élément égal à 1 (dans le cas de l'événement F_n).
Si on note $\widetilde{T}_n$ une variable aléatoire donnant le nombre d'appels de `Unif` par ce nouvel appel indépendant de `LongueursCyclesAleaRejet(n)`, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_n = t) &= \mathbb{P}\left((T_n = t) \cap F_n^c\right) + \mathbb{P}\left((T_n = t) \cap F_n\right) && \text{proba totales}\\ &= \mathbb{P}\left((H_n = t) \cap F_n^c\right) + \mathbb{P}\left(\left(H_n + \widetilde{T}_n = t\right) \cap F_n\right)\end{aligned}$$

En effet, dans le premier cas, le nombre d'appels de Unif est H_n. Dans le deuxième cas le nombre d'appels de Unif est $H_n + \widetilde{T}_n$.
En utilisant le système complet d'événements $(H_n = s)_{s\in\mathbb{N}^*}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left(H_n + \widetilde{T}_n = t\right) \cap F_n\right) &= \sum_{s\geqslant 1} \mathbb{P}\left(\left(H_n + \widetilde{T}_n = t\right) \cap F_n \cap (H_n = s)\right)\\ &= \sum_{s=1}^{t-1} \mathbb{P}\left(\left(\widetilde{T}_n = t - s\right) \cap F_n \cap (H_n = s)\right)\end{aligned}$$

En utilisant que $\widetilde{T}_n$ est indépendante du premier appel de `LongueursCyclesAlea( n)` (donc de F_n et H_n), et qu'elle a la même loi que T_n, on obtient le résultat demandé.
Une autre manière de rédiger aurait été de noter $H_{n,k}$ le nombre d'éléments de la liste renvoyé au k-ième appel de `LongueursCyclesAlea(n)`, et $F_{n,k}$ l'événement correspondant à F_n à ce k-ième appel. Ces variables aléatoires et événements étant indépendants pour différents k, on obtient alors

$$\mathbb{P}(T_n = t) = \sum_{k\geqslant 1} \sum_{s_1+s_2+\cdots+s_k=t} \mathbb{P}\left(\left(H_{n,k} = s_k\right) \cap F_{n,k}^c\right) \prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}\left(\left(H_{n,i} = s_i\right) \cap F_{n,i}\right).$$

On peut alors retrouver la formule demandée à partir de ce résultat, en coupant la somme pour $k = 1$ et $k \geqslant 2$ (et en notant alors $s = s_1$).
Question en fin de sujet traitée par un très petit nombre de copies, une seule copie a explicitement remarqué l'erreur d'énoncé. Les explications ont été faites dans l'urgence de fin de rédaction et n'étaient pas de la plus grande rigueur, mais ont donné l'impression d'une compréhension raisonnable.

(b) *L'erreur d'énoncé se répercutait ici, il fallait montrer* $\mathbb{E}[T_n] = \frac{h_n}{p_{0,n}}$.
D'après ce que l'on a admis dans le paragraphe suivant l'algorithme 4 , la probabilité que l'un des cycles soit de taille 1 pour une permutation tirée uniformément dans S_n (c'est à dire qu'elle ait au moins un point fixe) correspond à la probabilité que LongueursCyclesAlea(n) renvoie une liste avec au moins un élément de valeur 1 (c'est l'événement F_n). On a donc $\mathbb{P}(F_n) = 1 - p_{0,n}$.
L'algorithme 5 correspond à faire des appels successifs (indépendants) de LongueursCyclesAlea(n), en s'arrêtant au premier succès correspondant au cas où la liste renvoyée n'a pas

d'élément égal à 1 (donc le succès arrive avec probabilité $p_{0,n}$). Comme à chaque appel de LongueursCyclesAlea (n) il y a au plus n appels de Unif, le nombre d'appels T_n de Unif est inférieur à n fois le nombre d'appels de LongueursCyclesAlea (n), qui suit une loi géométrique de paramètre $p_{0,n}$, et donc d'espérance finie. Donc T_n a également une espérance finie.
On peut donc écrire

$$\mathbb{E}[T_n] = \sum_{t\geqslant 1} t\mathbb{P}(T_n = t) = \sum_{t\geqslant 1} t\mathbb{P}\left((H_n = t)\cap F_n^c\right) + \sum_{t\geqslant 1}\sum_{s=1}^{t-1} t\mathbb{P}((H_n = s)\cap F_n)\mathbb{P}(T_n = t-s).$$

La double somme peut s'écrire, en utilisant Fubini et le changement d'indice $u = t - s$:

$$\begin{aligned}\sum_{s\geqslant 1}\sum_{u\geqslant 1}(u+s)\mathbb{P}((H_n = s)\cap F_n)\mathbb{P}(T_n = u) &= \mathbb{E}[T_n]\sum_{s\geqslant 1}\mathbb{P}((H_n = s)\cap F_n) + \sum_{s\geqslant 1} s\mathbb{P}((H_n = s)\cap F_n)\\ &= \mathbb{E}[T_n]\mathbb{P}(F_n) + \mathbb{E}[H_n] - \sum_{s\geqslant 1} s\mathbb{P}\left((H_n = s)\cap F_n^c\right).\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\mathbb{E}[T_n] = \sum_{t\geqslant 1} t\mathbb{P}\left((H_n = t)\cap F_n^c\right) + \mathbb{E}[T_n]\mathbb{P}(F_n) + \mathbb{E}[H_n] - \sum_{s\geqslant 1} s\mathbb{P}\left((H_n = s)\cap F_n^c\right) = \left(1 - p_{0,n}\right)\mathbb{E}[T_n] + h_n,$$

ce qui donne le résultat voulu.
De loin la question la plus difficile d'un sujet long, qui n'a donc pas vraiment été abordée.

(c) On fait de même qu'en 2.c de la partie II. On fixe φ dans $S_{0,n}$ et on note A l'événement «la permutation renvoyée lors de l'appel de PermAleaCycles(LongueursCyclesAleaRejet(n)) est égale à φ». On considère le système complet d'événements $(Z_n = k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ où Z_n compte le nombre d'appels de la fonction LongueursCyclesAlea (n). L'événement $A\cap(Z_n = k)$ correspond au cas où la fonction LongueursCyclesAleaRejet (n) renvoie $(k-1)$ fois une liste ayant au moins un élément égal à 1 (ce qui se produit avec probabilité $\mathbb{P}(F_n) = \left(1 - p_{0,n}\right)$, indépendamment à chaque fois) puis qu'au k ième appel, la fonction LongueursCyclesAlea (n) renvoie une liste listeL telle que l'appel ensuite de PermAleaCycles(listeL) renvoie φ. Ceci se produit avec la même probabilité que lorsque l'appel direct de PermAleaCycles(LongueursCyclesAlea (n)) renvoie φ, c'est à dire avec probabilité $\frac{1}{n!}$ d'après ce que l'on a admis dans le paragraphe suivant l'algorithme 4. Par la formule des probabilités totales, on obtient donc

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k\geqslant 1}\mathbb{P}(A\cap(Z_n = k)) = \sum_{k\geqslant 1}\left(1 - p_{0,n}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{n!} = \frac{1}{p_{0,n}}\cdot\frac{1}{n!} = \frac{1}{d_n} = \frac{1}{\mathrm{Card}\left(S_{0,n}\right)}.$$

On obtient bien donc la loi d'un tirage aléatoire uniforme dans $S_{0,n}$.
Le nombre d'appel de Unif lors de l'appel de PermAleaCycles(LongueursCyclesAleaRejet (n)) est $T_n + (n-1)$ (en effet PermAleaCycles requiert dans tous les cas $n-1$ appels de Unif, tout comme PermAlea). On a donc $v_n = \mathbb{E}[T_n] + n - 1 = \frac{h_n}{p_{0,n}} + n - 1$. Comme $\frac{h_n}{p_0,n} \sim \frac{\ln n}{p_0} = o(n)$, on obtient que $v_n \sim n$ lorsque $n\to\infty$.
De même ici, la question n'a pas vraiment été abordée.

Partie IV

a) On s'attendait simplement à ce que les candidat·e·es notent qu'avec l'algorithme 5 de rejet basé sur les cycles, légèrement plus évolué que l'algorithme 2 de rejet simple, on gagne asymptotiquement un facteur $\frac{1}{p_0} = e$ en terme de nombre d'appels à la fonction Unif. Certaines copies ont essayé de discuter de celà, sans jamais être très convaincantes.

b) C'est une comparaison somme-intégrale comme dans la question 2.a de la partie III, utilisant cette fois-ci la croissance de ln. Le calcul de l'intégrale se fait par intégration par parties. Quelques bonnes réponses, une primitive de ln étant parfois connue par cour.

c) En remarquant que $\ln\left(\frac{n^{(1-\varepsilon)n}}{n!}\right) = (1-\varepsilon)n\ln n - \sum_{k=1}^{n} \ln k \leqslant -\varepsilon n \ln n + n - 1 \to -\infty$ par la question précédente, on obtient le résultat voulu. Comme $p_{0,n} = \frac{d_n}{n!} \sim p_0$, on obtient également que $\frac{n^{(1-\varepsilon)n}}{d_n} \to 0$ donc dès que n est assez grand, $n^{(1-\varepsilon)n} < d_n$.
La suite de la question était plus ouverte, on peut par exemple noter qu'un programme n'utilisant que de l'ordre de $(1-\varepsilon)n$ appels à la fonction Unif peut produire uniquement $n^{(1-\varepsilon)n}$ résultats différents au maximum, et qu'il ne peut donc pas produire tous les dérangements, au nombre de d_n. On ne peut pas espérer avoir un programme qui fasse mieux qu'un nombre d'appel asymptotiquement meilleur que n, comme l'algorithme 5. La preuve de la limite a parfois été donnée correctement. On n'attendait pas de réponse très rigoureuse à la deuxième partie de la question, qui n'a pas vraiment été abordée.