Nom :

Interrogation de mathématiques BCPST spé 2
Jeudi 14 septembre 2023
Réponses

Consignes : les réponses et les éventuels calculs doivent figurer sur ce document, n'oubliez pas d'indiquer votre nom.

1. Compléter les formules suivantes, a et b sont des réels tels que les quantités soient bien définies
   - $\sum_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$
   - $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   - Soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$
2. Énoncer le théorème de passage des inégalités à la limite pour des suites
   Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles convergent respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2 et si à partir d'un certain rang u_n est plus petit que v_n, alors
   $$\ell_1 \leqslant \ell_2$$
3. Énoncer le théorème des suites adjacentes. Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang
   (a) (u_n) est croissante et (v_n) décroissante
   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$
   On dit alors que les suites sont **adjacentes** et dans ce cas le théorème affirme que les deux suites convergent vers un même réel ℓ.
4. Calculer
   $$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{3}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}$$

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left(1+\frac{3}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} = \exp\left(\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{3}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

Or

$$\ln(1+u) \sim_0 u \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$$

on a donc

$$\ln\left(1+\frac{3}{\sqrt{n}}\right) \sim_{+\infty} \frac{3}{\sqrt{n}}$$

puis

$$\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{3}{\sqrt{n}}\right) \sim_{+\infty} 3$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\ln\left(1+\frac{3}{\sqrt{n}}\right) = 03$$

La fonction exponentielle étant continue

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} = \mathrm{e}^3}$$

*