DM facultatif type ENS
à rendre dans deux semaines

I Loi de la partie fractionnaire d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire admettant la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée continue sur $\mathbb{R}$, comme densité. On suppose que f est telle que $\left|f'\right|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ c'est à dire l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} |f'(t)| \mathrm{d}t$ converge.
Pour tout entier n positif ou nul, on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par la relation

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x^n \exp(-x)}{n!} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ et où par convention $0! = 1$. On rappelle l'équivalent de Stirling : quand n tend vers l'infini,

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

On rappelle que la fonction de répartition de X est la fonction qui à tout nombre réel t associe $\mathbb{P}(X \leqslant t)$.

1. Quelle est la fonction de répartition d'une variable uniforme sur $[0;1[$?
2. Montrer que f_0 et f_1 sont des densités de probabilité, puis que pour tout entier n positif ou nul, f_n est une densité de probabilité.
3. Soit X une variable aléatoire ayant pour densité f_n ($n \in \mathbb{N}$), montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.
4. S'il existe un réel a tel que f soit croissante sur $]-\infty; a]$ et décroissante sur $[a; +\infty[$, exprimer $\int_{\mathbb{R}} \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x$ à l'aide de $f(a)$.
   Indication : on pourra préalablement démontrer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
5. Soit g une fonction définie et continue sur $[0;1]$ et dérivable sur $[0;1[$ telle que $g(0) = g(1) = 0$, et telle qu'il existe un nombre réel C tel que pour tout $x [0;1[$, $\left|g'(x)\right| \leqslant C$. Montrer :

$$\forall t \in [0;1] \qquad |g(t)| \leqslant \frac{C}{2}$$

Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière (c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x) et $\mathrm{frac}(x) \in [0;1[$ sa partie fractionnaire, de sorte que $x = \lfloor x \rfloor + \mathrm{frac}(x)$. Par exemple, $\lfloor 12,34 \rfloor = 12$ et $\mathrm{frac}(12,34) = 0,34$

6. Montrer que pour tout $t \in [0;1[$:

$$\mathbb{P}(\mathrm{frac}(X) \leqslant t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(k \leqslant X \leqslant k + t)$$

7. En déduire que pour tout $t \in [0;1[$:

$$\mathbb{P}(\mathrm{frac}(X) \leqslant t) - t = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k(t),$$

   où $g_k : [0,1[\to \mathbb{R}$ est la fonction définie par :

$$g_k(t) = \int_k^{k+t} f(x) dx - t \int_k^{k+1} f(x) dx$$

indication on pourra utiliser, sans le démontrer, que pour une fonction intégrale positive sur $\mathbb{R}$, $\int_R h(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_k^{k+1} h(t)\,\mathrm{d}t$.

8. Montrer que g_k est dérivable sur $[0;1[$, puis que :

$$\forall t \in [0;1[, \quad \left|g_k'(t)\right| \leqslant \int_k^{k+1} \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x$$

En déduire que :

$$\sup_{t\in[0;1]} |\mathbb{P}(\mathrm{frac}(X) \leqslant t) - t| \leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x.$$

9. Pour tout entier n positif ou nul, soit Z_n une variable aléatoire de densité f_n. Montrer que :

$$\sup_{t\in[0,1]} |\mathbb{P}\,(\mathrm{frac}\,(Z_n) \leqslant t) - t| \to 0$$

quand n tend vers l'infini.

II Loi de Benford

Dans cette section, on note $\log_{10}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ définie par la relation $\log_{10}(x) = \ln(x)/\ln(10)$. On a donc pour tous réels a et b strictement positifs les relations $\log_{10}(ab) = \log_{10}(a) + \log_{10}(b)$ et $\log_{10}(10^a) = a$. On appelle loi de Benford la loi de probabilité sur l'ensemble $\mathbb{R}$ dont la fonction de répartition coïncide, sur l'intervalle $[1,10[$, avec la fonction $\log_{10}$.

10. Si X est une variable aléatoire suivant la loi de Benford et si $F = \lfloor X \rfloor$ est sa partie entière (la partie entière est définie juste avant la question 5 de la partie A), montrer que :

$$\mathbb{P}(F = 1) = \mathbb{P}(F \in \{2,3\}) = \mathbb{P}(F \in \{5,6,7,8,9\})$$

11. Si X est une variable aléatoire suivant la loi de Benford, quelle est la loi de $\log_{10}(X)$? *Indication : on pourra penser à calculer sa fonction de répartition.*

On appelle mantisse d'un réel strictement positif x l'unique réel $M(x)$ appartenant à l'intervalle $[1;10[$ tel qu'il existe un entier relatif k pour lequel on puisse écrire $x = M(x) \times 10^k$. Par exemple, $M(123) = 1{,}23$ et $M(0{,}25) = 2{,}5$.

12. Soit k un entier strictement positif. Si X est une variable aléatoire de loi uniforme sur $\left]1;10^k\right[$, quelle est la loi de $M(X)$?
13. On rappelle que $\mathrm{frac}(x)$, défini juste avant la question 5, désigne la partie fractionnaire d'un réel x. Montrer que pour toute variable aléatoire strictement positive X on a :

$$\mathbb{P}(M(X) \leqslant x) = \mathbb{P}\left(\mathrm{frac}\left(\log_{10}(X)\right) \leqslant \log_{10}(x)\right).$$

14. Pour tout entier n positif ou nul, soit $Y_n = 10^{Z_n}$, où Z_n est une variable aléatoire de densité f_n (fonction définie au début de la partie A). Montrer que :

$$\sup_{t\in[1;10]} \left|\mathbb{P}\,(M\,(Y_n) \leqslant t) - \log_{10}(t)\right| \to 0$$

quand n tend vers l'infini.

15. Soit Y une variable aléatoire réelle strictement positive telle que $M(Y)$ suit la loi de Benford. Montrer que pour tout réel c strictement positif, $M(cY)$ suit également la loi de Benford.