DL mathématiques n°13
Pour le lundi 3 février 2025

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente et donner sa valeur
2. On considère la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2(1+|x|)^2}$.
   (a) Montrer que f est paire.
   (b) Tracer rapidement la courbe représentative de f
   (c) Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

Dans la suite, on considère une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ admettant f comme densité.
On note F la fonction de répartition de X.

3. X admet elle une espérance ? Une variance ?
4. On pose $Y = \ln(1+|X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire , elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$
   (a) Déterminer $Y(\Omega)$
   (b) Exprimer la fonction de répartition G de Y à l'aide de F.
   (c) En déduire que Y admet pour densité la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 2e^x f(e^x - 1) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   (d) Montrer enfin que Y suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.