DM 12

BCPST Spé

à rendre le lundi 27 janvier 2025

Le but de cet exercice est de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}\,\mathrm{d}t$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $u_n=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+t+t^n}\,\mathrm{d}t$ et on a, en particulier, $u_0=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{2+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier l'existence de u_n.
2. Calculer u_0 et u_1.
3. (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (b) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n\leqslant \ln 2$.
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, écrire $\ln 2-u_n$ sous la forme d'une intégrale.
   (b) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad \ln 2-u_n\leqslant\dfrac{1}{n+1}$.
   (c) Donner la limite de la suite (u_n).
5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $v_n=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}\,\mathrm{d}t$.
   (a) Justifier la convergence de l'intégrale définissant v_n.
   (b) Montrer que : $\forall n\geqslant 2,\quad 0\leqslant v_n\leqslant\dfrac{1}{n-1}$.
   (c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$, puis donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}\,\mathrm{d}t$.