DL mathématiques n°13
Réponses

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}\,dx$ est convergente et donner sa valeur

RÉPONSE:

La fonction intégrée est continue sur $[0;+\infty[$.
Soit $A>0$

$$\int_0^A \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^A$$
$$= 1 - \frac{1}{1+A}$$

Donc

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = 1$$

$\boxed{\text{L'intégrale converge et vaut 1 .}}$

❀

2. On considère la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2(1+|x|)^2}$.

(a) Montrer que f est paire.

RÉPONSE:

$\mathbb{R}$ est centrée en 0 et pour x réel

$$f(-x) = \frac{1}{(1+|-x|^2)} = \frac{1}{(1+|x|^2)} = f(x)$$

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est paire.}}$

❀

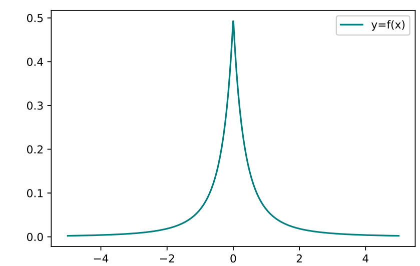
(b) Sans calculer de dérivée on sait que $x \mapsto (1+|x|)^2$ est croissante strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. En utilisant la parité

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

Le calcul des limites se fait par opérations, sans rencontrer de forme indéterminée

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x=np.linspace(-5,5,1000)
plt.plot(x,1/(2*(1+abs(x))**3),color="teal",label='y=f(x)')
plt.legend()
plt.show()
```



(c) Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

RÉPONSE:

La fonction est positive sur $\mathbb{R}$ et continue comme quotient défini d'une fonction continue. (valeur aboslue est bien continue sur $\mathbb{R}$) de plus grace à la parité

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t &= 2\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{2(1+|x|)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= 1 && \text{première question}\end{aligned}$$

$\boxed{f \text{ peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.}}$

❀

Dans la suite, on considère une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ admettant f comme densité.
On note F la fonction de répartition de X.

3. On doit étudier l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{2(1+|x|)^2}\,\mathrm{d}x$$

Or

$$\frac{x}{2(1+|x|)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$$

et pour $A > 1$ l'intégrale de $x \mapsto 1/x$ fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donne

$$\int_1^A \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(A) - \ln 1$$

ce qui démontre que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge et les fonctions étudiées étant positives, le théorème de comparaison sur les intégrales de fonctions positives affirme que $\int_1^{+\infty} \frac{x}{2(1+|x|)^2}\,\mathrm{d}x$ diverge, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{2(1+|x|)^2}\,\mathrm{d}x$ diverge

$\boxed{X \text{ n'admet pas d'espérance et à plus forte raison de variance.}}$

4. On pose $Y = \ln(1+|X|)$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$

   (a) Déterminer $Y(\Omega)$

RÉPONSE:

Comme $|X|+1$ prend ses valeurs dans $[1; +\infty[$ et que pour u plus grand que 1 $\ln(u) \geqslant 0$

$\boxed{Y \text{ prend ses valeurs dans } \mathbb{R}_+}$

❀

   (b) Exprimer la fonction de répartition G de Y à l'aide de F.

RÉPONSE:

Pour $x < 0$ d'après le résultat précédent , $G(x) = 0$
Soit $x \leqslant 0$

$$\begin{aligned}G(x) &= P(Y \leqslant 0)\\ &= P(\ln(1+|X|) \leqslant x)\\ &= P(1+|X| \leqslant \mathrm{e}^x) && \text{exp est croissante}\\ &= P(|X| \leqslant \mathrm{e}^x - 1)\\ &= P(1-\mathrm{e}^x \leqslant X \leqslant \mathrm{e}^x - 1)\\ &= F(\mathrm{e}^x - 1) - F(1-\mathrm{e}^x)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } x \text{ réel } G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F(\mathrm{e}^x - 1) - F(1-\mathrm{e}^x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$$

❀

(c) En déduire que Y admet pour densité la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 2e^x f(e^x - 1) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

RÉPONSE:

F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car c'est la fonction de répartition d'une variable dont la densité est continue sur $\mathbb{R}$. Comme exponentielle est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par composition $x \mapsto F(\mathrm{e}^x - 1) - F(1 - \mathrm{e}^x)$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ et donc G est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty; 0[$ et $]0; \infty[$.
De plus comme F est continue en 0

$$\lim_{x \to 0^+} G(x) = F(0) - F(0) = \lim_{x \to 0-} G(0) = G(0)$$

Donc G est continue en 0

$\boxed{G \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ et de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf peut être en } 0.}$

Pour $x < 0$ $G'(x) = 0$ et pour $x > 0$

$$\boxed{g(x) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x - 1) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

Remarque : on peut choisir n'importe valeur pour la densité en 0 !

❀

(d) Montrer enfin que Y suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.

RÉPONSE:

Pour $x \geqslant 0$

$$\begin{aligned} 2\mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x - 1) &= 2\mathrm{e}^x \frac{1}{2(1 + |\mathrm{e}^x - 1|)^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x}{(1 + |\mathrm{e}^x - 1|)^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^x}{(1 + \mathrm{e}^x - 1)^2} && \text{car } \mathrm{e}^x - 1 > 0 \text{ car } x > 0 \\ &= \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} && \text{car } \mathrm{e}^x - 1 > 0 \text{ car } x > 0 \\ &= \mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

et on reconnaît une densité de la loi exponentielle de paramètre 1.

❀