DL mathématiques n°14
Pour le lundi 10 février 2025

On rappelle que pour un réel x, $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

1. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0;1[$.
   On considère la variable aléatoire réelle X définie par $X = -\ln(U)$.
   (a) Montrer que X est une variable aléatoire à densité et déterminer la loi de X.
   (b) Écrire une fonction Python `simulX()` qui simule et renvoie une valeur de la variable aléatoire X.

2. On définit maintenant la variable aléatoire réelle Y de la façon suivante : $Y = \lfloor X \rfloor$.
   (a) Écrire une fonction Python `simulY()` qui simule et renvoie une valeur de la variable aléatoire Y.
   (b) Déterminer $Y(\Omega)$.
   (c) Montrer, pour tout entier naturel n : $P(Y = n) = \left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)\mathrm{e}^{-n}$.
   (d) Montrer que la variable aléatoire $Y+1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
   En déduire l'espérance et la variance de Y.
   (e) Recopier et compléter le programme ci-dessous pour que la fonction `simulYbis()` simule et revoie la valeur de la variable aléatoire Y.

```
from random import random
from math import exp

def simulYbis():
    u=random()
    y=.......
    while u > ........ :
        ..........
        .........
    return y
```

3. Soit U une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
   On suppose que les variables aléatoires U et Y sont indépendantes.
   Soit la variable aléatoire $T = (2U - 1)\,Y$, produit des variables aléatoires $2U - 1$ et Y.
   Ainsi, T est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs.
   (a) Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance $E(T)$ et calculer $E(T)$.
   (b) Vérifier que $T^2 = Y^2$.
   En déduire que la variable aléatoire T admet une variance $V(T)$ et calculer $V(T)$.
   (c) Pour tout nombre entier relatif n, calculer la probabilité $P(T = n)$.

4. (Facultatif) Soit la variable aléatoire $D = X - Y$. On note F_D la fonction de répartition de D.
   (a) Justifier :
   $$\forall t \in]-\infty;0[,\ F_D(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in [1;+\infty[,\ F_D(t) = 1.$$
   (b) Soit $t \in [0;1[$. Exprimer l'événement $(D \leqslant t)$ à l'aide des événements $(n \leqslant X \leqslant n+t)$, $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Pour tout nombre réel $t \in [0;1[$ et pour tout nombre entier naturel n, calculer la probabilité $P(n \leqslant X \leqslant n+t)$.
   (d) Montrer : $\forall t \in [0;1[,\ F_D(t) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-1}}$
   (e) Montrer que D est une variable aléatoire à densité. Déterminer une densité de D.