Algèbre linéaire : réduction

BCPST Spé 2 Lycée Champollion Grenoble

Janvier 2025

Table des matières

Rappels

Définition 1 (Matrices semblables)**.**
Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ On dit que A et B sont semblables si et seulement si il existe une matrice inversible P telle que

$$A = P^{-1}BP$$

Proposition 1 (Propriétés d'une matrice diagonale)**.**
Soit D une matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

- ***Puissances*** *: Soit k un entier naturel alors*

$$D^k =$$

- ***Inverse*** *: D est inversible si et seulement si tous les coefficients diagonaux sont non nuls et alors*

$$D^{-1} =$$

Proposition 2 (Caractérisations d'une matrice inversible)**.**
Soit A une matrice ***carrée*** *de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *A est inversible.*

2.
$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \qquad AX = 0 \Leftrightarrow$$

3. le système **homogène** *associé admet pour unique solution* $(0, 0, \ldots, 0)$

4. $\mathrm{rg}\,(A) =$

5. L'endomorphisme associé est .

Proposition 3 (Inversibilité d'une matrice 2×2)**.**
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *une matrice* A *est inversible si et seulement si* $ad - bc \neq 0$

Démonstration :

Proposition 4 (Produit de matrice par colonnes)**.**
Soit A *une matrice et* B *une matrice telle que* AB *existe. On note*B_1, B_2,… B_n *les colonnes de* B. *Alors la colonne* i *de* AB *est obtenue en calculant* AB_i

Exercice 1.
Étudier $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ Que peut on dire lorsque l'on multiplie une matrice A **à droite** par une matrice diagonale ?

I Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice

Dans toute cette partie on s'intéresse à des matrices carrées à coefficient réels ou complexes.

I.1 Définitions

Définition 2 (Valeur propre)**.**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on dit que λ est ***une valeur propre de*** *A si et seulement si il existe un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$* NON NUL *tel que*

$$AX = \lambda X$$

Attention : Si on oublie NON NUL tout scalaire devient valeur propre.

Remarque : Cela revient à vérifier l'existence d'une solution NON NULLE dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ pour l'équation

$$(A - \lambda I_n)X = 0$$

et en en déduit

Méthode 1 pour trouver les valeurs propres d'une matrice

λ est une valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I$ n'est pas inversible.

Un cas particulier de la méthode précédente : $\lambda = 0$.

Méthode : Matrice non inversible et valeur propre 0

Une matrice admet 0 pour valeur propre si et seulement si cette matrice n'est pas inversible si et seulement si son noyau n'est pas réduit au vecteur nul.

Définition 3 (Spectre)**.**
L'ensemble des valeurs propres d'une matrice est nommé le spectre *et est noté Sp(A).*

Proposition 5 (Matrices triangulaires)**.**
Soit T une matrice triangulaire. Alors les valeurs propres de T sont exactement les coefficients diagonaux.

Définition 4 (Vecteurs propres et sous-espaces propres)**.**
Soit A une matrice et λ une valeur propre de A

- *$C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un* ***vecteur propre*** *associé à λ si et seulement si C est* NON NUL *et*

$$AC = \lambda C$$

- *Le* ***sous espace propre associé à*** *λ est :*

$$E_\lambda = \{C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) / AC = \lambda C\} = \operatorname{Ker}\Big(\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)$$

Méthode pour calculer les vecteurs propres

On résout l'équation $AC = \lambda C$ où λ est un paramètre et C l'inconnue .

I.2 Propriétés

Proposition 6 (Structure de E_λ)**.**
Soit λ une valeur propre de la matrice A alors E_λ est un sous espace-vectoriel de .

Démonstration :

Proposition 7 (Concaténation des familles de vecteurs propres)**.**
Soit C_1, C_2, … C_p des vecteurs propres associés à la même valeur propre λ. On suppose de plus que $(C_1, C_2, \dots, C_p)$ forment une famille libre.
Soit D_1, D_2, … D_r des vecteurs propres associés à la même valeur propre μ. On suppose de plus que $(D_1, D_2, \dots, D_r)$ forment une famille libre. Alors $(C_1, \dots, C_p, D_1, \dots D_n)$ forment une famille libre.

Démonstration :

Méthode : Liberté et vecteurs propres

Si C_1 , $C_2, \dots, C_p$ sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes alors cette famille est libre.

I.3 Matrices diagonalisables

Définition 5 (Matrice diagonalisable)**.**
On dit qu'une matrice A est ***diagonalisable*** *si et seulement si il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telle que :*

$$A = PDP^{-1}$$

Remarque : Diagonaliser une matrice A c'est trouver une matrice D diagonale semblable à A. C'est faire un changement de base vers une base de vecteurs propres pour l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé.
Remarque :

On peut écrire la relation $A = PDP^{-1}$ sous la forme

$$AP = PD$$

Si on note C_i la $i$ème colonne de P.

$$A(C_1C_2\dots C_n) = (C_1C_2\dots C_n)D$$

et on retrouve

$$AC_i = \lambda_i C_i$$

Proposition 8 (Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité d'une matrice)**.**
Soit A une matrice carrée d'ordre n alors .

- *La somme(éventuellement vide) des dimensions des sous espaces propres est toujours inférieure ou égale à la taille de la matrice.*
- *il y a égalité si et seulement si A est diagonalisable*

Proposition 9 (Condition suffisante de diagonalisabilité d'une matrice)**.**
Soit A une matrice carrée d'ordre n. Si A a un nombre de valeurs propres distinctes égale sa taille ***alors*** *A est diagonalisable et les sous espaces propres sont tous de dimension 1.*

Méthode 1 pour affirmer qu'une matrice est diagonalisable

On trouve les valeurs propres et les sous espaces propres associés à chacune des valeurs propres et on constate que la somme de leur dimension est égale à l'ordre de la matrice (c'est à dire la taille d'une matrice carrée). Cette méthode permet en pratique de calculer la matrice de passage et donc de diagonaliser la matrice A.

La matrice P est constituée de des vecteurs colonnes propres

La matrice D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres répétées autant de fois que la dimension du sous espace propres associé

Méthode 1bis pour affirmer qu'une matrice est diagonalisable

On trouve les valeurs propres et les dimensions des sous espaces propres associés à chacune des valeurs propres **en utilisant le théorème du rang** . On constate que la somme de leur dimension est égale à l'ordre de la matrice (c'est à dire la taille d'une matrice carrée).

On ne connaît pas la matrice P .

La matrice D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres répétées autant de fois que la dimension du sous espace propres associé

Méthode 2 pour affirmer qu'une matrice est diagonalisable

Il suffit de constater qu'une matrice a autant de valeurs propres différentes que son ordre (c'est à dire la taille d'une matrice carrée). Cette méthode ne donne pas les vecteurs propres associées ni la matrice de passage.

Méthode cas classique de matrice non diagonalisable (à avoir démontrer par l'absurde)

Soit A une matrice n'ayant qu'une unique valeur propre λ. Alors la seule façon pour que la matrice A soit diagonalisable c'est que $A = \lambda I$, ce que est la plupart du temps faux (sinon la question n'est pas intéressante!)

Proposition 10.
La somme (éventuellement vide) des dimensions des sous espaces propres est inférieure ou égale à l'ordre de la matrice

On anticipe sur le cours qui vient

Théorème 1 (Matrices symétriques)**.**
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique alors elle est diagonalisable.

Méthode 3 pour affirmer qu'une matrice est diagonalisable

Il suffit de constater qu'une matrice est symétrique pour pouvoir affirmer qu'elle est diagonalisable (cette méthode ne donne ni les vecteurs propres ni les valeurs propres ni la matrice de passage).

II Transcription et généralisation pour un endomorphisme

Dans toute le suite u désigne un endomorphisme de E un espace vectoriel (souvent mais pas toujours de dimension finie).

II.1 Définitions et premières propriétés

Définition 6 (Valeurs propres)**.**
*Soit λ un réel on dit que λ est une **valeur propre** de u si et seulement si il existe*

Méthode 1 pour trouver les valeurs propres d'un endomorphisme

λ est une valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda Id_E$ n'est pas injectif

.

Un cas particulier de la méthode précédente : $\lambda = 0$.

Méthode :endomorphisme non injectif et valeur propre 0

Si on constate qu'un endomorphisme u admet 0 pour valeur propre alors u n'est pas injective .

Définition 7 (Spectre)**.**
L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme est nommé le .

Définition 8 (Vecteurs propres et sous-espaces propres)**.**
Soit u un endomorphisme et λ une valeur propre de u

- $\mathbf{x} \in$ *est un* ***vecteur propre*** *associé à λ si et seulement si $\mathbf{x}$ est* *et*

- *Le* ***sous espace propre associé à*** *λ est*

  $E_\lambda = \{\mathbf{x} \in \qquad / \qquad \} = \mathrm{Ker}$

Proposition 11 (Structure de E_λ)**.**
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ Soit λ une valeur propre alors E_λ est un sous espace-vectoriel de .

Proposition 12 (Concaténation de familles de vecteurs propres)**.**
Soit $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \dots, \mathbf{e_p}$ des vecteurs propres associés à la même valeur propre λ. On suppose de plus que $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \dots, \mathbf{e_p})$ forment une famille .
Soit $\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \dots \mathbf{f_n}$ des vecteurs propres associés à la même valeur propre μ On suppose de plus que $(\mathbf{f_1}, \mathbf{f_2}, \dots, \mathbf{f_n})$ forment une famille .

Alors *forment une famille libre.*

II.2 Dimension finie et lien avec les matrice

Définition 9 (Endomorphisme diagonalisable en dimension finie)**.**
Diagonaliser un endomorphisme u c'est trouver une base de vecteur propres. La matrice de passage est formée des cordonnées des vecteurs propres dans la base canonique, la matrice diagonale D a pour coefficients les valeurs propres dans le même ordre. La matrice de u dans la base de vecteurs propres est D, Si A est la matrice de u dans la base canonique est A alors

$$A = PDP^{-1}$$

Proposition 13 (Lien entre spectre et vecteurs propre de u et d'une matrice représentative)**.**
Soit u un endomorphisme de E espace vectoriel de dimension finie et A une matrice représentative de u dans une base $\mathscr{B}$ de E.

- $Sp(A) = Sp(u)$
- $\mathbf{x}$ *est un vecteur propre de u si et seulement si sa matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est un vecteur propre de A.*
- *u est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.*

Proposition 14 (Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité en dimension finie)**.**
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de u.

- *La somme(éventuellement vide) des dimensions des sous espaces propres est inférieure ou égale à la dimension de E.*
- *u est diagonalisable si et seulement si il y a égalité*

Proposition 15 (Condition suffisante de diagonalisabilité en dimension finie)**.**
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de u.

Si u a un nombre de valeurs propres distinctes égale la dimension de E ***alors*** *u est diagonalisable et les sous espaces propres sont tous de dimension 1.*

III Utilisation de `python/numpy.linalg`

Le polycopié fourni pendant l'épreuve orale (extraits)

Numpy

```
import numpy as np
```

`np.array()`	Transforme une liste en matrice numpy
`np.zeros([n,m])`	Crée la matrice nulle de taille n × m
`np.eye(n)`	Crée la matrice identité de taille n
`np.diag(L)`	Crée la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les éléments de la liste L
`np.transpose(M)`	Renvoie la transposée de M
`np.dot(M,P)`	Renvoie le produit matriciel M P
`np.prod(M)`	Renvoie le produit de tous les éléments de M
`np.shape(M)`	Renvoie dans un couple le format de la matrice M

Numpy.linalg

```
import numpy.linalg as la
```

`la.inv(M)`	Renvoie l'inverse de la matrice M si elle est inversible
`la.eigvals(M)`	Renvoie la liste des valeurs propres de M
`la.eig(M)`	Renvoie un couple L,P : L liste des valeurs propres de M , P matrice de passage associée
`la.matrix_rank(M)`	Renvoie le rang de M

Premier exemple On cherche à diagonaliser

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
A=np.array([[0,1,1,1],[1,0,1,1],[1,1,0,1],[1,1,1,0]])
la.eigvals(A)
>>[-1.  3. -1. -1.]
```

```
L,P=la.eig(A)
>>[-1.  3. -1. -1.]
[[-0.8660254   0.5         0.21699376  0.        ]
 [ 0.28867513  0.5        -0.86278187  0.        ]
 [ 0.28867513  0.5         0.32289406 -0.70710678]
 [ 0.28867513  0.5         0.32289406  0.70710678]]
```

Si on veut obtenir un vecteur par exemple la première colonne liée à la valeur propre -1 on utilise `P[:,0]` `[-0.8660254 , 0.28867513, 0.28867513, 0.28867513]`

Valeurs et vecteurs complexes : notation des physiciens

```
B=np.array([[1,0,0],[0,1,-1],[0,1,1]])
L,P=la.eig(B)
>>[1.+1.j 1.-1.j 1.+0.j]
[[0.        +0.j         0.        -0.j         1.        +0.j        ]
 [0.70710678+0.j         0.70710678-0.j         0.        +0.j        ]
 [0.        -0.70710678j 0.        +0.70710678j 0.        +0.j        ]]
```

Attentions aux valeurs très petites en notation scientifique

```
C=np.array([[1,1,-1,4],[1,1,1,1],[1,1,1,4],[1,-1,2,3]])
L,P=la.eig(C)
>>[ 5.51213995 -1.75359619  1.          1.24145624]
[[-4.11498325e-01 -7.95882661e-01  5.77350269e-01  3.59854602e-01]
 [-3.53405643e-01  2.84698875e-01 -5.77350269e-01 -7.21548712e-01]
 [-6.45827441e-01 -3.71818579e-01 -5.77350269e-01 -5.88949206e-01]
 [-5.37289956e-01  3.83755502e-01 -3.49409510e-16  5.48721618e-02]]
```

Matrices de tailles inhabituelles On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $N(n_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

```
n=10
Nn=np.zeros([n,n])
for i in range(n):
 for j in range(n):
     if i!= j:
         Nn[i,j]=1
la.eigvals(Nn)
>>[-1.,  9., -1., -1., -1., -1., -1., -1., -1., -1.]
```