

COUPLES DE VAD

Les basiques

Exercice 1.

Le couple de variable aléatoires (X, Y) a pour loi conjointe

X/Y	1	2	3	
1	1/5	1/5	α	
2	1/10	1/10	1/20	
3	1/5	0	1/10	

1. Trouver la valeur de α pour que l'on ait bien une loi de probabilité.
2. Calculer les lois marginales de X et Y .
3. Calculer la loi de X sachant $Y = 1$
4. Les variables aléatoires sont elles indépendantes?

Exercice 2.

Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{6} \quad \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2} \quad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{12} \quad \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{4}$$

On note $Y = X^2$.

1. Calculer la loi du couple (X, Y)
2. X et Y sont elles indépendantes?

Exercice 3.

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n . L'urne k contient k billes numérotées de 1 à k . On choisit une urne au hasard et on tire une boule au hasard dans cette urne.

On note X le numéro de l'urne choisie et Y le numéro de la bille tirée.

1. L'énoncé nous donne de façon implicite deux probabilités, dont une conditionnelle. Lesquelles?
2. Calculer la loi du couple (X, Y)
3. En déduire la loi de Y .
4. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$
5. X et Y sont elles des variables aléatoires indépendantes?
6. Écrire une fonction `simul(n)` qui renvoie une simulation des valeurs de X et Y . On rappelle que `random.randint(a, b)` renvoie un entier au hasard uniformément entre a et b .
7. Utiliser la fonction précédente pour calculer une estimation de $\mathbb{P}(X = Y)$.

Les classiques

Exercice 4.

Les clients d'un supermarché ont chacun une probabilité $p \in]0; 1[$ de payer avec une carte bancaire

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de clients en une journée et Y le nombre de personne payant par carte bancaire en une journée. On admet que X et Y sont deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

1. Rappeler les propriétés de la loi de Poisson.
2. Interpréter l'énoncé pour obtenir $\mathbb{P}_{(X=k)}(Y = i)$
3. En déduire la loi marginale de Y .
4. Y admet-elle une espérance? Si oui la calculer.

Exercice 5 (▲).

Dans cet exercice on pourra manipuler les Σ infinis comme des Σ finis.

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} .

On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\mathbb{P}(\{X = j\} \cap \{Y = k\}) = \frac{a}{j!k!} \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer la valeur de a pour que la somme des probabilités $\sum_{(j,k) \in \mathbb{N}^2} \mathbb{P}(\{X = j\} \cap \{Y = k\}) = 1$
2. Reconnaître les lois marginales de X et Y .
3. Les variables X et Y sont elles indépendantes?

Exercice 6.

Dans cet exercice on pourra manipuler les Σ infinis comme des Σ finis.

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} .

On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}(\{X = j\} \cap \{Y = k\}) = a \cdot \frac{j+k}{2^{j+k}} \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer la valeur de a .
2. Déterminer les lois marginales X et Y .
3. Les variables X et Y sont elles indépendantes?
4. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

Exercice 7 (Somme double pour calcul d'une espérance).

On continue ici l'exercice 3

1. Montrer que $E(Y) = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq k \leq n} \frac{i}{k}$
2. En déduire que $E(Y) = \frac{n+3}{4}$
3. Avec une technique analogue calculer $E(Y^2)$ et en déduire la variance de Y .

Les techniques utiles

Exercice 8.

x, y et z désignent des réels.

1. Montrer que $x + y = \max(x, y) + \min(x, y)$
2. Montrer que $\max(x, y, z) = \max(\max(x, y), z)$
3. Montrer que $\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$
4. Trouver une formule analogue pour $\max(x, y)$

Exercice 9.

On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires. Le but de cet exercice est de « commencer » à calculer la loi de $X + Y$. Compléter les formules suivantes

1. **Exemple** Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ alors $(X + Y)(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad [X + Y = n] = \bigcup_{j=0}^n [X = j] \cap [Y = n - j] = \bigcup_{j=0}^n \dots$$

et dans cette union les événements sont incompatibles deux à deux.

2. Si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ alors ...
3. Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ alors ...
4. Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ alors ...
5. Si $X(\Omega) = \mathbb{Z}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{Z}$ alors ...

Exercice 10 (Maximum de trois vad, minimum de trois vad).

Soit X, Y et Z trois vad de support \mathbb{N} en s'inspirant du cours donner une méthode pour calculer $\min(X, Y, Z)$ et $\max(X, Y, Z)$

Somme, max, min

Exercice 11.

On lance deux pièces qui donnent pile avec la probabilité $p \in]0; 1[$.

On lance la première pièce jusqu'au premier pile et on note X_1 le rang du premier pile pour la première pièce. On prend la deuxième pièce et on la lance jusqu'à obtenir un pile et on note X_2 le rang d'apparition du premier pile .

1. Analyse dy sujet : X_1 et X_2 sont elles indépendantes? Qu'elles sont leur loi.
2. Calculer la loi de $X_1 + X_2$
3. Calculer $\mathbb{P}_{X_1 + X_2 = n}(X_1 = k)$
4. Analyse du sujet : Décrire une expérience avec des dès qui nous ferait à faire le même type de calcul

Exercice 12 (une somme).

On suppose que X et Y sont indépendantes et suivent une même loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$.

On pose $Z = X + Y$

1. Compléter et démontrer la formule suivante pour $n \in \mathbb{N}$

$$[Z = n] = \bigcup_{k=\dots}^{\dots} [X = k] \cap [Y = \dots]$$

2. En déduire la loi de Z

Exercice 13.

Soit X et Y deux variable aléatoires discrètes indépendantes de même loi $\mathcal{G}(p)$. Calculer la probabilité de l'évènement

$$\max(X, Y) = \min(X, Y)$$

Exercice 14 (Trois lois de Bernoulli).

Soit A, B et C trois variables aléatoires indépendantes suivant une loi $\mathcal{B}(p)$ avec $p > 0; 1[$.

1. Calculer la loi de ABC
2. A et ABC sont elles indépendantes?

Exercice 15 (Trois lois uniformes).

Soit X, Y et Z trois variables aléatoires suivant la même loi uniforme sur $[[1, n]]$. On suppose de plus qu'elles sont indépendantes.

1. Calculer la loi de $\max(X, Y, Z)$.
2. Quelles sont les valeurs prises par $X + Y$?
3. Montrer que

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \begin{cases} \frac{k-1}{n^2} & \text{si } k \in [[2, n]] \\ \frac{2n-k+1}{n^2} & \text{si } k \in [[n+1, 2n]] \end{cases}$$

4. Vérifier que l'on a bien une loi de probabilité.
5. Calculer $\mathbb{P}(X + Y = Z)$.

Exercice 16.

Soit p et r deux réels de $]0; 1[$, et

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \quad Y \hookrightarrow \mathcal{G}(r)$$

On suppose de plus que X et Y sont indépendantes.

1. Calculer $\mathbb{P}(X \geq k)$.
2. En déduire la loi de $\min(X, Y)$
3. Calculer $\mathbb{P}(X \geq Y)$
4. Comment interpréter les résultats précédents en termes de lancer de pièces.

Covariance

Exercice 17.

Soit A et B deux variables indépendantes suivant la loi $\mathcal{U}([1, n])$

1. Simplifier $[A + B = 2n] \cap [A - B = 0]$
2. En déduire que $A + B$ et $A - B$ ne sont pas indépendantes
3. Montrer $\text{cov}(A + B, A - B) = V(A) - V(B)$
4. $A + B$ et $A - B$ sont elles corrélées?

Exercice 18.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[[1, n]]$. Soit z une variable aléatoire suivant la loi donnée par :

$$z(\Omega) = \{-1, 1\} \quad \mathbb{P}(z = -1) = \mathbb{P}(z = 1)$$

On suppose que X et z sont indépendantes et on note

$$Y = zX$$

1. X et Y sont-elles indépendantes?
2. Calculer la loi du couple (X, Y)
3. Calculer $\text{Cov}(X, Y)$.
4. Conclusion?

Exercice 19.

Soit X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de même paramètre λ .

1. Donner la loi de $X + Y$ et la loi de $Y + Z$
2. Calculer la covariance de $X + Y$ et $Y + Z$

Exercice 20.

La variable X suit une loi de Poisson de paramètre λ et la variable aléatoire Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(X, p)$ où p est un réel fixé appartenant à $]0; 1[$.

1. Calculer $\mathbb{P}_{X=j}(Y = i)$. On distinguera les cas $i \leq j$ et $i > j$.
2. En déduire la loi du couple (X, Y) .
3. Montrer que Y suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.
4. On note Z la variable aléatoire représentant le nombre d'échec. Montrer sans calcul que Z suit une loi de Poisson de paramètre λq .
5. Montrer que Y et Z sont indépendantes.
6. Montrer que $V(Z) = V(X) + V(Y) - 2\text{cov}(X, Y)$.
7. En déduire $\text{cov}(X, Y)$.
8. Que vaut $\text{cov}(X, Z)$?

Exercice 21.

On répartit aléatoirement m boules dans n urnes. On suppose que $m \geq 4$ et $n \geq 3$. Les urnes sont numérotées de 1 à n et on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si l'urne i contient au moins une boule à la fin de l'expérience et 0 sinon.

1. Analyse du sujet Comment interpréter l'énoncé « réparti aléatoirement... »?
2. Calculer $\mathbb{P}(X_i = 0)$, en déduire la loi de X_i
3. Calculer $\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1])$ (distinguer les cas $i = j$ et $i \neq j$)
4. Calculer $\text{Cov}(X_i, X_j)$.
5. X_i et X_j sont-elles indépendantes?
6. Analyse du sujet décrire une expérience qui nous ferait faire le même type de calculs.

Suites de vad.**Exercice 22** (Somme de loi de Bernoulli).

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toute la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

Quelle est la loi de $X_1 + \dots + X_n$?

Exercice 23 (Somme de lois binomiales).

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoires mutuellement indépendantes et telle que X_i suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n_i, p)$.

Quelle est la loi de $X_1 + \dots + X_n$?

Exercice 24 (Somme de lois Poisson).

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoires mutuellement indépendantes et telle que X_i suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_i)$.

Quelle est la loi de $X_1 + \dots + X_n$?

Exercice 25.

Soit X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi $\mathcal{G}(p)$. On note $m = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $M = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. On note $q = 1 - p$, et k désigne un entier naturel non nul.

1. Montrer que $\mathbb{P}(X_i > k) = q^k$.
2. Calculer $\mathbb{P}(m > k)$ et en déduire la loi de m .
3. Calculer $E(m)$.
4. Calculer la loi de M .

Exercice 26.

Une urne contient n_1 boules portant le numéro 1, n_2 boules portant le numéro 2 et n_3 boules portant le numéro 3. On effectue k tirages avec remise et on note X_1 la variable aléatoire donnant le nombre de boules 1 obtenues, X_2 le nombre de billes 2 obtenues et X_3 le nombre de billes 3.

1. Donner les lois des variables X_1, X_2, X_3 ainsi que leur espérance et leur variance.
2. Donner la loi de $X_1 + X_2$ et en déduire $\text{cov}(X_1, X_2)$.
3. Que peut-on dire du signe de cette covariance?
4. Proposer un programme python pour simuler cette expérience.
5. On suppose maintenant que $n_2 = n_1$ et $n_3 = 0$. Que vaut alors $\text{Cov}(X_1, X_2)$?

Exercice 27.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, à valeur dans $\{-1, 1\}$, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \text{ avec } p \in]0; 1[$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$Y_n = \prod_{i=1}^n X_i$$

1. Déterminer les lois de Y_2 et Y_3 .
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathbb{P}(Y_n = 1) = p_n$. Déterminer une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n .

3. En déduire la loi de Y_n .
4. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{Cov}(Y_n, Y_{n+1})$.
5. Existe-t-il des valeurs de p pour lesquelles Y_n et Y_{n+1} sont indépendantes?
6. Écrire une fonction `simulationY(n, p)` en python pour simuler la variable aléatoire Y_n .

Exercice 28.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, à valeur dans $\{-1, 1\}$, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \text{ avec } p \in]0; 1[$$

On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k$$

et on note B_i une variable aléatoire suivant la loi de Bernouilli $\mathcal{B}(p)$

1. Trouver deux réels a et b tel que $X_i = aB_i + b$
2. Trouver la loi de S_n , donner son espérance et sa variance.
3. Ecrire une fonction `simulationS(n, p)` en python pour simuler la loi de S_n .
4. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\text{Cov}(S_n, S_{n+1})$.
5. Existe-t-il des valeurs de p pour lesquelles S_n et S_{n+1} sont indépendantes?

Pour aller plus loin

Exercice 29.

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toute la loi $\mathcal{B}(p)$.

Soit N un variable aléatoire indépendante des précédentes qui suit une loi $\mathcal{P}(\lambda)$ On note pour tout entier

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k$$

1. Pour n fixé donner la loi de S_n .
2. On pose $Y = S_N$. Donner $\mathbb{P}_{N=n}(Y = k)$
3. En déduire la loi de Y .
4. Bonus reprendre l'exo pour $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

Exercice 30 (Variance d'une somme de n VAD).

Soit X_1, X_2, \dots, X_n , n variables aléatoires qui admettent des moment d'ordre 2

1. Compléter et démontrer la formule

$$V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n V(X_k) + 2 \sum_{\dots\dots} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

2. Combien y a til de termes dans le second sigma?