DL mathématiques n°15
Pour le lundi 17 février 2025

SUJET D'ORAL

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x + y - z, 2y, -x + y + z)$$

On considère aussi l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose $u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0)$ et $v = g(e_1) + e_1$.

1. (a) Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$.
   (b) À l'aide de Python, déterminer les valeurs propres de g et conjecturer la dimension de chaque sous-espace propre de f. L'endomorphisme f semble-t-il diagonalisable
   On rappelle que, dans la bibliothèque Python `numpy`, la fonction `linalg.eig(A)` renvoie les valeurs propres (réelles et complexes) de A et la matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres associés à ces valeurs propres (dans le même ordre).
2. (a) Montrer que la famille $\mathscr{C} = (u, v, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer la matrice T de g dans la base $\mathscr{C}$.
   (c) En déduire les valeurs propres de g. L'endomorphisme g est-il diagonalisable?
3. On note $E = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) / AM = MB\}$.
   (a) Écrire une fonction Python E(M) qui prend en argument une matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui renvoie `True` si $M \in E$ et `False` sinon.
   On rappelle que, si N est une matrice contenant des booléens, l'instruction `N. all()` renvoie `True` si N ne contient que des `True` et renvoie `False` sinon.
   On rappelle aussi que, dans la bibliothèque Python `numpy`, la fonction `dot(N, P)` renvoie le produit matriciel NP.
   (b) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   (c) Montrer, par l'absurde, que si $M \in E$, alors M n'est pas inversible.
   (d) Montrer que $Sp(B) = Sp\left(B^{\mathrm{T}}\right)$ (où $Sp(B)$ est l'ensemble des valeurs propres de B)
   (e) Montrer que, si $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2 et si $Y \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de B^{T} associé à la valeur propre 2 , alors $XY^{\mathrm{T}} \in E$.
   (f) En déduire que $\dim(E) \geqslant 2$.

DUR ET FACULTATIF

Soit n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Si M est une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la matrice M^{T} de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ désigne la transposée de M.
On identifie les ensembles $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ en assimilant une matrice de $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ à son unique coefficient.
On note E_i la matrice colonne de taille n dont tous les coefficient sont nuls sauf le i-ème qui vaut 1. On note $\mathscr{B}_n = (E_1, \dots, E_n)$ et on admet que cette famille forme une base (canonique) de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On construit $\mathscr{B}_p = (F_1, \dots, F_n)$ une base de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ de la même manière.
Si $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ ($q \in \mathbb{N}^*$), *on admet* que $(MN)^{\mathrm{T}} = N^{\mathrm{T}} M^{\mathrm{T}}$.

1. Soit X une matrice colonne non nulle donnée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de composantes $x_1, x_2, ..., x_n$ dans la base $\mathscr{B}_n$.
   On pose : $A = XX^{\mathrm{T}}$ et $\alpha = X^{\mathrm{T}}X$.
   (a) Exprimer A et α en fonction de $x_1, x_2, ..., x_n$. Justifier que la matrice A est diagonalisable.
   (b) Soit f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice A dans la base $\mathscr{B}_n$.
   Déterminer $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f$; donner une base de $\mathrm{Im}\ f$ et préciser la dimension de $\mathrm{Ker}\ f$.
   (c) Calculer la matrice AX. Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les sous-espaces propres associés.
2. On suppose que n et p vérifient $1 \leqslant p \leqslant n$. Soit $(V_1, V_2, ..., V_p)$ une famille libre de p vecteurs de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   On note V la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont, dans cet ordre, $V_1, V_2, ..., V_p$.
   Soit g l'application linéaire de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice V dans les bases $\mathscr{B}_p$ et $\mathscr{B}_n$.
   (a) Justifier que le rang de V est égal à p. Déterminer $\mathrm{Ker} g$.
   (b) Soit Y une matrice colonne de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
   Montrer que l'on a $VY = 0$ si et seulement si l'on a $V^T VY = 0$.
   (c) En déduire que la matrice $V^{\mathrm{T}}V$ est inversible.