

## ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Dans ce TP, les notations pour les fonctions inconnues et les variables peuvent changer d'un exercice à l'autre.

### Équations linéaires

**Exercice 1** (Premier ordre linéaire).

Résoudre les équations suivantes, on donne une indication pour trouver la solution particulière :

- $y'(x) - y(x) = \sin(2x)$  *indication*  $y_p : t \mapsto a \cos(2x) + b \sin(2x)$
- $y'(x) + 2xy(x) = 2xe^{-x^2}$  *indication* variation de la constante.
- $y'(x) + 2 \tan(x)y(x) = \sin(2x)$  sur  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  *indication* variation de la constante.
- $y' + x^2y = -x^2$  *indication*  $y_p$  constante.
- $y'(x) - \frac{x}{1+x^2}y(x) = \frac{1}{1+x^2}$  sur  $]1; +\infty[$  *indication*  $y_p$  polynomiale
- $y'(x) - \frac{x}{x^2-1}y(x) = 2x$  sur  $]1; +\infty[$  *indication* variation de la constante ou solution simple.

**Exercice 2** (Second ordre, homogène).

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- $x'' - 3x' - x = 0$
- $x'' - 2x' + x = 0$
- $x'' - 2x + 2x = 0$

**Exercice 3** (Second ordre).

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- $y'' - 3y' + 2y = 0$  avec les conditions initiales  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = -1$ ,
- $y'' - 2y' + y = xe^x$ , on cherchera une solution particulière sous la forme  $P(x)e^x$  où  $P$  polynomiale.
- $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$ , on pourra chercher une solution particulière sous la forme  $x \mapsto ax \cos(x)e^x$
- $y'' + y' + y = \cos x$ . On pourra chercher une solution particulière sous la forme  $x \mapsto a \cos x + b \sin x$ .

**Exercice 4** (Conditions aux bords).

Soit  $\omega$  un réel strictement positif,  $a$  et  $b$  sont des réels et on pose  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . On cherche à résoudre l'équation

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad y(0) = a \quad y(T) = b$$

- Résoudre l'équation homogène sans condition.
- À quelle condition sur  $a$  et  $b$  l'équation admet elle une solution, cette solution est elle unique?
- On change les conditions initiales par  $y(0) = a$   $y(T/2) = b$ , quelles sont les solutions?

### Équation autonomes

**Exercice 5.**

Résoudre

- $x'(t) = 1 + x^2(t)$   
*indication* On commencera par diviser par  $1 + x^2$  après justification
- Chercher les solutions à valeurs dans  $] -1; 1[$  de l'équations  $x'(t) = 1 - x^2(t)$

**Exercice 6** (✎).

Résoudre

- $x'(t) = e^{x(t)} - 1$ .  
Poser  $z(t) = x(t) + t$ ,

- $t \cdot x'(t) = x(t) \cdot (1 + \ln(x(t)) - \ln(t))$ .  
Poser  $z(t) = \ln(x(t)/t)$ .
- $t \cdot x'(t) = x(t) \cdot (1 + \ln(\frac{x(t)}{t}))$ .

## Recollement

**Exercice 7** (Recollement détaillé). 1. Soient  $C, D \in \mathbb{R}$ . On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par

$$f(x) = \begin{cases} C \exp\left(\frac{-1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ D \exp\left(\frac{-1}{x}\right) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur  $C$  et  $D$  pour que  $f$  se prolonge par continuité en 0.
  - Démontrer que si cette condition est remplie, ce prolongement, toujours noté  $f$ , est alors dérivable en 0 et que  $f'$  est continue en 0.
2. On considère l'équation différentielle

$$x^2 y' - y = 0.$$

Résoudre cette équation sur les intervalles  $]0; +\infty[$  et  $]-\infty; 0[$ .

3. Résoudre l'équation précédente sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 8.

On cherche à déterminer les fonctions  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables vérifiant l'équation (E) suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x(x-1)y'(x) - (3x-1)y(x) + x^2(x+1) = 0.$$

1. Déterminer deux constantes  $a$  et  $b$  telles que

$$\frac{3x-1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}.$$

- Sur quel(s) intervalle(s) connaît-on l'ensemble des solutions de l'équation homogène? Résoudre l'équation homogène sur cet(ces) intervalle(s).
- Chercher une solution particulière à (E) sous la forme d'un polynôme du second degré.
- Résoudre (E) sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 9 (Bonus, non détaillé).

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- $(1+x^2)f'(x) - xf(x) = \sqrt{1+x^2}$ ,
- $f'(x) \cos x + f(x) \sin x = 1$  sur  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  avec  $f(0) = 2$ .
- $xf'(x) - f(x) = \ln(x)$ ,
- $xf'(x) - f(x) = x^3$ ,
- $x^2 f'(x) + xf(x) = 1 + 2x^2$ ,
- $(1-x^2)f'(x) + xf(x) = 0$ ,

#### RÉPONSE:

1. On divise par  $(1+x^2)$  ce qui est toujours possible l'équation devient

$$f'(x) - \frac{x}{1+x^2} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

La méthode du cours permet de résoudre l'équation homogène

$$f_h : x \mapsto K \sqrt{1+x^2}$$

La méthode de la variation de la constante amène à résoudre

$$\lambda'(x) \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ce qui donne

$$\lambda(x) = \arctan(x) + K$$

Les solutions sont de la forme

$$x \mapsto \arctan(x) \sqrt{1+x^2} + K \sqrt{1+x^2}$$

2. Comme le cosinus ne s'annule pas sur l'intervalle d'étude, on peut simplifier en

$$f'(x) + \tan(x)f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

En utilisant la méthode du cours et en remarquant que  $\tan(x) = -\frac{\cos'(x)}{\cos x}$ , les solutions de l'équation homogène sont

$$f_h : x \mapsto K \cos x$$

La variation de la constante nous amène à résoudre

$$\lambda'(x)\cos(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

En reconnaissant le dérivée de tangente on obtient

$$\lambda : x \mapsto \tan(x) + K$$

Les solutions de l'équation sont

$$x \mapsto \sin(x) + K \cos(x)$$

3. On étudie cette équation sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et on peut donc l'écrire sous la forme

$$f'(x) - \frac{1}{x}f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

Les solutions homogènes sont

$$x \mapsto Kx$$

La variation de la constante nous amène à résoudre

$$\lambda'(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

Une intégration par parties donne

$$\lambda(x) = -\frac{\ln x + 1}{x} + K$$

Les solutions de l'équation sont

$$x \mapsto Kx - \ln x - 1$$

4. On réduit l'ensemble d'étude à  $\mathbb{R}_+^*$ ; l'équation devient

$$f'(x) - \frac{1}{x}f(x) = x^2$$

Nous venons de résoudre l'équation homogène, la variation de la constante donne

$$\lambda'(x)x = x^2$$

Les solutions de l'équation sont

$$x \mapsto Kx + \frac{x^3}{2}$$

5. On étudie cette équation sur  $\mathbb{R}_+^*$ , l'équation devient

$$f'(x) + \frac{1}{x}f(x) = \frac{1}{x^2} + 2$$

Les solutions homogènes sont

$$x \mapsto \frac{K}{x}$$

La variation de la constante nous amène à résoudre

$$\lambda'(x)\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} + 2$$

Les solutions de l'équation sont

$$x \mapsto \frac{\ln x}{x} + x + \frac{K}{x}$$

6. On va étudier cette équation sur  $] -1; 1[$ , elle devient

$$f'(x) + \frac{x}{1-x^2}f(x) = 0$$

les solutions de l'équation sont

$$x \mapsto K\sqrt{1-x^2}$$

\*

## Pour aller plus loin

**Exercice 10** (Changement de fonction inconnue ).

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations différentielles suivantes :

- $(1 + e^x)y'' + 2e^x y' + (2e^x + 1)y = xe^x$  en posant  $z(x) = (1 + e^x)y(x)$ ;
- Sur  $]0; +\infty[$  résoudre  $xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$ , en posant  $z(x) = xy(x)$ .

RÉPONSE:

Pour  $x$  réel,

$$\begin{aligned} z(x) &= (1 + e^x)y(x) && \text{c'est toujours possible} \\ z'(x) &= (1 + e^x)y'(x) + e^x y(x) \\ z''(x) &= (1 + e^x)y''(x) + 2e^x y'(x) + e^x y(x) \end{aligned}$$

$(1 + e^x)y'' + 2e^x y' + (2e^x + 1)y = (1 + e^x)y'' + 2e^x y' + e^x y + (e^x + 1)y = z'' + z$  Résolvons

$$z''(x) + z(x) = xe^x$$

L'équation homogène à pour solution  $x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x)$ . Cherchons une solution particulière sous la forme  $x \mapsto P(x)e^x$  où  $P$  est une fonction polynomiale, qui vérifie alors (en simplifiant par  $e^x$ )

$$P'' + 2P' + P + P = x$$

donc  $P$  doit être de degré 1 et on trouve  $x \mapsto \frac{1}{2}(x-1)e^x$ , les solutions de l'équation en  $z$  sont donc

$$x \mapsto \frac{1}{2}(x-1)e^x + A\cos(x) + B\sin(x)$$

Les solutions de l'équation sont

$$x \mapsto \frac{1}{1+e^x} \left( \frac{1}{2}(x-1)e^x + A\cos(x) + B\sin(x) \right)$$

Pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , on pose, ce qui cet intervalle est toujours possible

$$z(x) = xy(x)$$

$$z'(x) = xy'(x) + y(x) \quad z''(x) = xy''(x) + 2y'(x)$$

On remarque

$$xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = xy'' + 2y' + 2(xy' + y) + xy$$

L'équation en  $y$  devient

$$z'' + 2z' + z = 0$$

Qui admet pour solution

$$x \mapsto Ae^{-x} + Bxe^{-x}$$

Les solutions de l'équation sont

$$x \mapsto \frac{A}{x}e^{-x} \cos(x) + Be^{-x} \sin(x)$$

\*

**Exercice 11** (Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 3).

Soit  $(E_1)$  l'équation différentielle  $y^{(3)} = y$ .

- Soit  $f$  une solution à valeurs complexes de  $(E_1)$ . On pose  $g = f + f' + f''$ . Déterminer une équation différentielle  $(E_2)$  du premier ordre vérifiée par  $g$ .
- Résoudre  $(E_2)$ .
- Résoudre  $(E_1)$ .

RÉPONSE:

- $g' = f' + f'' + f^{(3)}$  Comme  $f$  est solution de  $(E_1)$ ,  $g' = f' + f'' + f$ ,  
On constate alors que

$$g' = g$$

- $g$  est de la forme  $g(x) = Ke^x$
- Nous devons donc maintenant résoudre

$$f(x) + f'(x) + f''(x) = Ke^x \quad (E_3)$$

où  $K$  est un paramètre réel Une solution particulière cherché sous la forme  $\lambda e^x$  est

$$f_p x \mapsto \frac{K}{3} e^x$$

Les solutions de l'équation homogènes sont de la forme

$$x \mapsto Ae^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + Be^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

En changeant les constantes, les solutions de l'équation de départ sont de la forme

$$x \mapsto Ae^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + Be^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + Ce^x$$

\*

### Exercice 12.

On cherche à déterminer les fonctions  $y, z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables et qui vérifient le système<sup>1</sup> suivant :

$$\begin{cases} y' - y = z \\ z' + z = 3y \end{cases}$$

- On suppose que  $y$  et  $z$  sont des solutions de ce système, trouver une équation différentielle du second ordre vérifiée par  $y$ .
- Résoudre cette équation, puis trouver l'expression de  $z$ .
- Compléter ce raisonnement "Analyse-Synthèse" par la partie "synthèse".

1. Les deux équations doivent être simultanément vérifiées

### RÉPONSE:

- Si  $y$  et  $z$  sont solutions alors  $y'$  est combinaison linéaire de  $y$  et  $z$  donc dérivable.

$$\begin{aligned} y'' &= y' + z' && \text{première ligne dérivée} \\ &= y' + 3y - z && \text{deuxième ligne} \\ &= y' + 3y - (y' - y) && \text{première ligne} \\ &= 4y \end{aligned}$$

$$y'' - 4y = 0$$

- 

$$y(x) = A \exp(2x) + B \exp(-2x)$$

$$z = y' - y$$

$$z(x) = A \exp(2x) - 3B \exp(-2x)$$

- Il suffit de vérifier que  $y$  et  $z$  précédents sont bien solutions

\*

### Exercice 13 (Autre utilisation de la variation de la constante).

On considère l'équation différentielle sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

$$(\mathcal{E}) \quad x^2 y'' - 5x y' + 9y = 4x + 9.$$

- Chercher une solution de l'équation homogène de la forme  $x \mapsto x^r$  et utiliser la méthode de la variation de la constante pour trouver toutes les solutions de l'équation homogène.
- Trouver les solutions de  $(\mathcal{E})$  sur  $]0; +\infty[$ .

**Exercice 14** (Équations fonctionnelles )

résoudre les équations suivantes

1.  $f'(x) + f(x) = 2f(0)$
2.  $f(x) + \int_0^x t f(t) dt = 1$
3.  $f'(x) + f(-x) = 0$

RÉPONSE:

1. Posons  $K = f(0) + f'(0)$ , l'équation devient

$$f' + f = K$$

On sait résoudre cette équation différentielle et on sait  $f$  est de la forme

$$f : x \mapsto Ce^{-x} + K$$

Réciproquement supposons que  $f$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = Ce^{-x} + K$  où  $C$  et  $K$  sont deux constantes réelles alors  $f(0) = C + K$   $f'(0) = -C$  et donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) + f(x) = K = f(0) + f'(0)$$

Les solutions sont les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = Ce^{-x} + K$  où  $C$  et  $K$  sont deux constantes réelles

On trouve une constante de plus que pour une équadiff d'ordre 1

2. **Analyse** Supposons que  $f$  soit une solution continue sur un intervalle  $I$  (contenant 0) de l'équation fonctionnelle donnée. Alors d'après le théorème fondamentale de l'analyse

$$\varphi : x \mapsto \int_0^x t f(t) dt$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ . et

$$\forall x \in I \varphi'(x) = x f(x)$$

On peut donc dériver l'égalité donnée

$$\forall x \in I \quad f'(x) + x f(x) = 0$$

On sait résoudre cette équation différentielle, il existe un réel  $K$  tel que

$$f x \mapsto K \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Cette fonction étant définie sur  $\mathbb{R}$

En réinjectant dans l'équation de départ, pour  $x = 0$

$$f(0) + \int_0^0 t f(t) dt = K \\ = 1$$

La seule solution continue possible sur  $\mathbb{R}$  est

$$x \mapsto e^{-x^2/2}$$

**Synthèse** Supposons que  $f$  soit définie ainsi alors

$$\int_0^x t f(t) dt = \int_0^x t e^{-t^2/2} dt = \left[-e^{-t^2/2}\right]_0^x = 1 - f(x)$$

ce qui permet de conclure

3. **Analyse**

Supposons que  $f$  soit solution de cette équation, On suppose  $f$  est dérivable sur un intervalle  $I$  centré en 0. Comme  $f'$  s'exprime à l'aide de  $f$ ;  $f'$  est dérivable donc  $f$  est deux fois dérivable et même de classe  $\mathcal{C}^2$  et en dérivant l'équation

$$\forall x \in I \quad f''(x) - f'(-x) = 0$$

Or  $f'(-x) + f(x) = 0$  donc

$$\forall x \in I \quad f''(x) + f(x) = 0$$

On reconnaît une équation différentielle usuelle. Il existe deux constantes  $a$  et  $b$  telles que

$$f x \mapsto a \cos(x) + b \sin(x)$$

fonction définie sur  $\mathbb{R}$ .

On obtient alors pour  $x$  réel

$$\begin{aligned} f'(x) + f(-x) &= -a \sin(t) + b \cos(t) + a \cos(-t) + b \sin(-t) \\ &= -a \sin(t) + b \cos(t) + a \cos(t) - b \sin(t) \end{aligned}$$

En prenant  $t = 0$  on obtient  $a + b = 0$  **Synthèse** Il est facile de vérifier que les fonctions  $t \mapsto a \cos(t) - a \sin(t)$  pour  $a$  constante sont bien solution.

\*

### Exercice 15.

On considère l'équation différentielle ( $\mathcal{E}$ ) sur  $] -1; +\infty[$  :

$$(x+1)f''(x) - f'(x) - xf(x) = (1+x)^2 e^x$$

- Vérifier que la fonction  $f(x) = e^x$  est solution de l'équation homogène associée ( $\mathcal{E}_0$ ).  
En déduire toutes les solutions de l'équation ( $\mathcal{E}$ ).
- En déduire l'ensemble des solutions de ( $\mathcal{E}$ ).

#### RÉPONSE:

On pose pour  $x$  réel  $f(x) = e^x$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = f'(x) = e^x$$

et pour  $x$  réel

$$(x+1)f''(x) - f'(x) - xf(x) = (x+1)e^x - e^x - xe^x = 0$$

Cette fonction est bien solution de l'équation homogène.

Soit  $f$  une fonction définie sur  $] -1; +\infty[$ . on défini  $\lambda$  par

$$\forall x \in ] -1; +\infty[ \quad f(x) = \lambda(x)e^x \quad \text{où} \quad \lambda(x) = f(x)e^{-x}$$

ce qui est toujours possible, et  $\lambda$  est dérivable par opérations

$$\forall x \in ] -1; +\infty[ \quad f'(x) = (\lambda(x) + \lambda'(x))e^x \quad f''(x) = (\lambda(x) + 2\lambda'(x) + \lambda''(x))e^x$$

Après calculs et simplifications par  $e^x$  on trouve que  $f$  est solution de l'équation homogène si et seulement si

$$\forall x \in ] -1; +\infty[ \quad (x+1)\lambda''(x) + (2x+1)\lambda'(x) = 0$$

On reconnaît une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par  $\lambda'$ , On calcule une primitive de  $x \mapsto \frac{2x+1}{x+1}$  sur  $] -1; +\infty[$  en remarquant que  $\frac{2x+1}{x+1} = 2 - \frac{1}{x+1}$

$$\begin{aligned} \lambda' : ] -1; +\infty[ &\rightarrow \mathbb{R} & K &\text{constante} \\ x &\mapsto K(x+1)e^{-2x} \end{aligned}$$

On intègre cette fonction par une intégration par parties

$$\begin{aligned} \lambda : ] -1; +\infty[ &\rightarrow \mathbb{R} & G_1, G_2 &\text{constantes} \\ x &\mapsto G_1(2x+3)e^{-2x} + G_2 \end{aligned}$$

les solutions de l'équations homogène sont de la forme  
 $x \mapsto G_1(2x+3)e^{-x} + G_2e^x$

Il suffit de chercher une solution particulière de la forme  $P(x)e^x$  où  $P$  est une fonction polynomiale.  $P$  vérifie alors

$$(x+1)P''(x) + (2x+1)P'(x) = (x+1)^2$$

On doit donc chercher une fonction polynomiale de degré 2 sous la forme  $P(x) = ax^2 + bx + c$ . Après calcul  $P(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$  convient

Les solutions de l'équation sur  $] -1; +\infty[$  sont les fonctions

$$x \mapsto G_1(2x+3)e^{-x} + \left(G_2 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x\right)e^x$$

\*

### Exercice 16.

On considère les équations différentielles :

$$y''(x) + 2y'(x) + 4y(x) = xe^x. \quad (\mathcal{E})$$

$$t^2 f''(t) + 3t f'(t) + 4f(t) = t \ln(t) \quad (\mathcal{F})$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à  $(\mathcal{E})$ .
2. Montrer que  $(\mathcal{E})$  admet une solution particulière de la forme  $x \mapsto P(x)e^x$  avec  $P$  un polynôme que l'on déterminera. Puis résoudre  $(\mathcal{E})$ .
3. Si  $t \mapsto f(t)$  est une solution de  $(\mathcal{F})$ , quelle est l'équation différentielle vérifiée par la fonction  $x \mapsto f(e^x)$ ? En déduire les solutions de  $(\mathcal{F})$ .

RÉPONSE:

Résultat du cours, il existe deux constantes  $A$  et  $B$  telles que

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto Ae^{-x} \cos(\sqrt{3}x) + Be^{-x} \sin(\sqrt{3}x)$$

$x \mapsto P(x)e^x$  est solution de  $(\mathcal{E})$  si et seulement si

$$P + 2P' + P'' + 2(P + P') + 4P = x$$

Donc  $P$  est de degré 1 et on trouve

$$P(x) = \frac{1}{7}x - \frac{4}{49}$$

les solutions de  $\mathcal{E}$  sont  $x \mapsto \left(\frac{1}{7}x - \frac{4}{49}\right)e^x + Ae^{-x} \cos(\sqrt{3}x) + Be^{-x} \sin(\sqrt{3}x)$

$g : x \mapsto f(\exp(x))$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  car l'exponentielle est à valeurs strictement positives.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = e^x f'(e^x) \quad g''(x) = e^{2x} f''(e^x) + e^x f'(e^x)$$

$$t^2 f''(t) + 3t f'(t) + 4f(t) = t \ln(t)$$

Peut s'écrire

$$t^2 f''(t) + t f'(t) + 2t f'(t) + 4f(t) = t \ln(t)$$

et en posant  $t = \exp(x)$

$$e^{2x} f''(e^x) + e^x f'(e^x) + 2e^x f'(e^x) + 4f(e^x) = e^x x$$

On constate que  $g$  vérifie la première équation

$$\forall x \in \mathbb{R} f(e^x) = \left(\frac{1}{7}x - \frac{4}{49}\right)e^t + Ae^{-x} \cos(\sqrt{3}x) + Be^{-x} \sin(\sqrt{3}x)$$

Avec  $x = \ln(t)$

les solutions sont de la forme

$$t \mapsto \left(\frac{1}{7} \ln(t) - \frac{4}{49}\right)t + \frac{A}{t} \cos(\sqrt{3} \ln(t)) + \frac{B}{t} \sin(\sqrt{3} \ln(t))$$

\*

### Exercice 17 (Forme théorique des solutions).

On s'intéresse à l'équation différentielle autonome

$$y' = F(y)$$

où  $F$  est une fonction continue, ne s'annulant pas sur un intervalle  $I$

1. Montrer qu'il existe une fonction  $G$  une primitive de  $\frac{1}{F}$  sur  $I$
2. Démontrer que  $G$  induit une bijection de  $I$  vers un intervalle  $J$  que l'on ne cherchera pas à calculer
3. Soit  $\lambda$  un réel fixé, on pose

$$y : t \mapsto G^{-1}(t + \lambda)$$

Montrer que  $y$  est solution de l'équation différentielle.

4. Essayez de démontrer la réciproque.

ce résultat n'est pas un résultat qu'on utilise en pratique pour résoudre des équations différentielles

RÉPONSE:

1. Comme  $F$  ne s'annule pas et est continue,  $1/F$  est aussi une fonction continue sur un intervalle donc elle admet des primitives.
2.  $G$  a pour dérivée  $1/F$ , cette dernière fonction ne change pas de signe et est continue sur un intervalle, donc en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires et un raisonnement par l'absurde on montre que  $G'$  est de signe constant, donc  $G$  est strictement monotone, continue sur un intervalle et on peut donc appliquer le théorème de la bijection monotone.
3. Le théorème de la dérivée de la bijection réciproque s'applique, car  $G'$  ne s'annule pas

$$\forall t \in J \quad (G^{-1})'(t) = \frac{1}{G'(G^{-1}(t))} = F(G^{-1}(t))$$

donc  $y$  a pour dérivée

$$y'(t) = 1F(y(t))$$

Ce qui démontre que  $y$  est solution ( sur l'intervalle  $J - \lambda$ )

4. Si  $y$  est solution sur un intervalle  $J$  à valeur dans  $I$

$$y' = F(y)$$

Comme  $F$  ne s'annule pas,  $F(y)$  ne s'annule pas sur  $J$

$$\frac{y'}{F(y)} = 1$$

En intégrant des deux côtés de l'égalité, et en reprenant les notations précédente, il existe une constante  $\lambda$  telle que

$$G(y) = t + \lambda \quad t \in J - \lambda$$

et comme  $G$  est bijective on retrouve le résultat précédent

\*