DM facultatif type ENS
Réponses

I Loi de la partie fractionnaire d'une variable aléatoire

1. On sait que :

$$\boxed{x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}}$$

2. Pour $n = 0$ on reconnaît une densité d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
Pour $n = 1$ la fonction f_1 est positive et continue sur $\mathbb{R}_+$, comme produit de fonctions continues et positives, continue et positive sur $]-\infty; 0[$ comme fonction nulle donc f_1 est positive sur $\mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0. Étudions l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f_1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} x\exp(-x)\,\mathrm{d}x$$

Cette dernière intégrale converge et vaut 1 car on reconnaît $E(X)$ où $X \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$.

$$\boxed{f_0 \text{ et } f_1 \text{ peuvent être considérées comme des fonctions de densité.}}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est positive et continue sur $\mathbb{R}_+$, comme produit de fonctions continues et positives, continue et positive sur $]-\infty; 0[$ comme fonction nulle donc f_n est positive sur $\mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.
Soit $n \in \mathbb{N}$, posons sous réserve d'existence

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrons par récurrence sur n que

$$\mathscr{H}_n : I_n \text{converge et vaut 1}$$

Initialisation $\mathscr{H}_0$ et $\mathscr{H}_1$ sont vérifiées.
Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que I_n converge et vaut 1. Sous réserve de convergence

$$I_{n+1} = \int_0^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \exp(-x)\,\mathrm{d}x$$

On pose pour $x \in \mathbb{R}$

$$u(x) = -\exp(-x) \qquad u'(t) = \exp(-x)$$
$$v(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad v'(x) = \frac{x^n}{n!}$$

On constate que

- u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to 0} u(x)v(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \exp(-x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} u(x)v(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \exp(-x) = 0$ (croissances comparées)

On sait donc que les intégrales $\int_0^{+\infty} u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^{+\infty} u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ ont même nature et comme

$$\int_0^{+\infty} u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

$$I_{n+1} = \left[-\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\exp(-x)\right]_0^{+\infty} + I_n = 0 - 0 + I_n$$

$$I_{n+1} \text{ converge et vaut } 1$$

Conclusion d'après le principe de récurrence

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ I_n \text{ converge et vaut } 1$$

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ f_n \text{ peut être considérée comme une fonction de densité.}}$$

3. Les convergences absolues se confondent avec les convergences car toutes les fonctions intégrées sont positives. Sous réserve de convergence

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^{+\infty} x f_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} \exp(-x)\,\mathrm{d}x \\
&= (n+1)\int_0^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \exp(-x)\,\mathrm{d}x \\
&= (n+1)\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= (n+1)\times 1 && \text{l'intégrale converge par définition d'une densité}
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_0^{+\infty} x^2 f_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= (n+1)(n+2)\int_0^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} \exp(-x)\,\mathrm{d}x \\
&= (n+1)(n+2)\int_0^{+\infty} f_{n+2}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= (n+1)(n+2)\times 1 && \text{l'intégrale converge par définition d'une densité}
\end{aligned}$$

La formule de König Huygens permet d'affirmer que X admet une variance et que

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = (n+1)(n+2) - (n+1)^2 = (n+1)$$

$$\boxed{X \text{ admet une espérance et une variance et } E(X) = n+1,\ V(X) = (n+1).}$$

4. Comme f est décroissante sur $]a;+\infty[$ f admet une limite finie ℓ en $+\infty$, comme f est une densité elle est positive et donc

$$\ell \geqslant 0$$

Supposons par l'absurde que $\ell > 0$ alors

$$\forall x \in]a;+\infty[\qquad f(x) \geqslant \ell > 0$$

De plus pour $A > a$

$$\int_a^A \ell\,\mathrm{d}x = \ell(A-a)$$

et comme $\ell > 0$

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A \ell\,\mathrm{d}x = +\infty$$

donc $\displaystyle\int_a f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge ce qui est en contradiction avec la définition d'une densité. donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

On démontrerait de la même façon que

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.}$$

Attention : il existe des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ qui ne tendent pas vers 0 en $+\infty$
f étant une fonction dérivable dont on connaît les variations on sait

$$\forall x \in]-\infty; a[\qquad f'(x) \leqslant 0 \qquad \forall x \in]a; \infty[\qquad f'(x) \geqslant 0$$

Soit $A > a$

$$\begin{aligned}
\int_a^A |f'(t)|\,\mathrm{d}t &= -\int_a^A f'(t)\,\mathrm{d}t && \text{remarque précédente}\\
&= -\left[f(t)\right]_a^A && \text{théorème fondamentale de l'analyse}\\
&= f(a) - f(A)
\end{aligned}$$

En utilisant le calcul de limite précédent

$$\lim_{A \to +\infty} \int_a^A |f'(t)|\,\mathrm{d}t = f(a)$$

Soit $A < a$

$$\begin{aligned}
\int_A^a |f'(t)|\,\mathrm{d}t &= \int_A^a f'(t)\,\mathrm{d}t && \text{remarque précédente}\\
&= \left[f(t)\right]_A^a && \text{théorème fondamentale de l'analyse}\\
&= f(a) - f(A)
\end{aligned}$$

En utilisant le calcul de limite précédent

$$\lim_{A \to +\infty} \int_a^A |f'(t)|\,\mathrm{d}t = f(a)$$

$$\boxed{\text{Dans ce cas } \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } 2f(a).}$$

5. Soit $x \in]0; 1[$.
La fonction g étant continue sur $[0; 1]$ et dérivable sur $]0; 1[$, on peut appliquer l'égalité des accroissements entre 0 et x.

$$\exists t \in]0; x[\qquad \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}| = g'(t)$$

donc comme $g(0) = 0$ et $x > 0$

$$\exists t \in]0; x[\quad |g(x)| = |g'(t)||x|$$

et $g'(t) \leqslant C$

$$|g(x)| \leqslant Cx$$

En se limitant à $x \in \left]0; \frac{1}{2}\right]$ $(g(0) = 0)$

$$\forall x \in [0; 1/2]\, |g(x)| \leqslant C\frac{1}{2}$$

De même on peut appliquer l'égalité des accroissements entre 0 et x.

$$\exists t \in]0; x[\qquad \frac{g(1) - g(x)}{1 - x}| = g'(t)$$

donc comme $g(1) = 0$ et $x < 1$

$$\exists t \in]x; 1[\quad |g(x)| = |g'(t)||1 - x|$$

et $g'(t) \leqslant C$

$$|g(x)| \leqslant C(1 - x)$$

En se limitant à $x \in \left]\frac{1}{2}; 1\right]$ $(g(1) = 0)$

$$\forall x \in [1; 1/2]\, 1 \qquad |g(x)| \leqslant C\frac{1}{2}$$

Dans les deux cas

$$\boxed{\forall x \in [0;1[\qquad |g(x)| \leqslant \frac{C}{2}.}$$

6. $(k \leqslant X < k+1)_{k\in\mathbb{Z}} = (\lfloor X \rfloor = k+1)_{k\in\mathbb{Z}}$ forme un système complet d'événement.
   Soit $t \in [0;1[$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathrm{frac}(X) \leqslant t) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}([\mathrm{frac}(X) \leqslant t] \cap [k \leqslant X < k+1]) && \text{formule proba totales} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(k \leqslant X \leqslant k+t]) && \text{car } 0 \leqslant t < 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{frac}(X) \leqslant t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(k \leqslant X \leqslant k+t)}$$

7. Soit $t \in [0;1[$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathrm{frac}(X) \leqslant t) - t &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(k \leqslant X \leqslant k+t) - t && \text{question précédente} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(k \leqslant X \leqslant k+t) - t\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x && \text{définition dune densité} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}(k \leqslant X \leqslant k+t) - t\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x && \text{Relation de Chasles} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\mathbb{P}(k \leqslant X \leqslant k+t) - t\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x\right) && \text{opération sur les } \Sigma\ [1] \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_k^{k+t} f(x)\,\mathrm{d}x - t\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x\right) && f \text{ est une densité de } X
\end{aligned}$$

   Ce qui démontre le résultat attendu
8. Comme f est continue, la fonction $\varphi\, t \mapsto \int_k^{k+t}(f(x)\,\mathrm{d}x$ est dérivable sur $[0;1]$ d'après le théorème fondamental de l'analyse

$$\forall t \in [0;1] \qquad \varphi'(t) = f(k+t)$$

   La fonction $\psi\, t \mapsto t\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ est dérivable (c'est une fonction affine)

$$\forall t \in [0;1] \qquad \psi'(t) = \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{g_k \text{ est dérivable sur } [0;1] \text{ et } \forall t \in [0;1] \qquad g'(t) = f(k+t) - \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x}$$

   Soit $t \in [0;1]$

$$\begin{aligned}
\left|g'(t)\right| &= \left|f(k+t) - \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_k^{k+1} f(k+t)\,\mathrm{d}x - \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x\right| && \text{intégrale d'une constante} \\
&= \left|\int_k^{k+1} (f(k+t) - f(x)\right|\,\mathrm{d}x \\
&= \left|\int_k^{k+1}\int_x^{k+t} f'(u)\,\mathrm{d}u\right|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_k^{k+1}\left|\int_x^{k+t} f'(u)\,\mathrm{d}u\right|\,\mathrm{d}x \qquad (*) && \text{inégalité triangulaire}
\end{aligned}$$

Or si $x < k+t$

$$\begin{aligned}\left|\int_x^{k+t} f'(u)\,\mathrm{d}u\right| &\leqslant \int_x^{k+t} \left|f'(u)\right| \mathrm{d}u \\ &\leqslant \int_k^{k+1} \left|f'(u)\right| \mathrm{d}u && \text{intégration d'une fonction positive sur } [x;\, k+t] \subset [k;\, k+1]\end{aligned}$$

et si $x \geqslant k+t$

$$\begin{aligned}\left|\int_x^{k+t} f'(u)\,\mathrm{d}u\right| &\leqslant \int_{k+t}^{x} \left|f'(u)\right| \mathrm{d}u \\ &\leqslant \int_k^{k+1} \left|f'(u)\right| \mathrm{d}u && \text{intégration d'une fonction positive sur } [k+t;\, x] \subset [k;\, k+1]\end{aligned}$$

Donc en reprenant l'inégalité $(*)$

$$\left|g'(t)\right| \leqslant \int_k^{k+1}\int_k^{k+1} \left|f'(u)\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}x$$

et comme on intégre une constante

$$\int_k^{k+1}\int_k^{k+1} \left|f'(u)\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}x = \int_k^{k+1} \left|f'(u)\right| \mathrm{d}u$$

$$\boxed{\forall\, t \in [0;\, 1[, \quad \left|g_k'(t)\right| \leqslant \int_k^{k+1} \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x}$$

La fonction g_k est continue sur $[0;\, 1]$ et $g_k(0) = 0 = g_k(1)$ (calcul immédiat), on peut donc appliquer le résultat de la question 4

$$\forall\, t \in [0;\, 1[, \quad \left|g_k(t)\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_k^{k+1} \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x$$

Donc pour $t \in [0;\, 1]$

$$\begin{aligned}|\mathbb{P}(\mathrm{frac}(X) \leqslant t) - t| &\leqslant \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k(t)\right| && \text{question 7} \\ &\leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|g_k(t)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_k^{k+1} |f'(x)|\,\mathrm{d}x && \text{point précédent} \\ &\leqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|\,\mathrm{d}x && \text{relation de Chasles}\end{aligned}$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout $t \in [0;\, 1]$,

$$\boxed{\sup_{t\in[0;\,1]} |\mathbb{P}(\mathrm{frac}(X) \leqslant t) - t| \leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left|f'(x)\right| \mathrm{d}x.}$$

9. Soit n un entier plus grand[2] que 2.

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^n}{n!}\exp(-x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

La fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$. Comme $n >\geqslant 1$, $\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = 0$ ce qui permet de démontrer que f_n est continue en 0. Pour $x < 0$

$$\frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = 0$$

2. ce n'est pas limitant car on va faire tendre n vers $+\infty$

ce qui admet 0 comme limite en 0^- Pour $x > 0$

$$\frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \frac{1}{n!} x^{n-1} \exp(-x)$$

et comme $n - 1 \geqslant 1$, cette quantité admet 0 comme limite à droite en 0, on a donc démontré que f_n est dérivable en 0. De plus comme

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_n'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{(x^{n-1}(n-x)}{n!} \exp(-x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On vérifie alors en calculant la limite à droite et à gauche en 0 que f_n'est continue en 0.

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\},\ f_n \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

On peut donc appliquer les résultats des questions précédentes.
De plus le tableau de variations de f_n est

x	$-\infty$		0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$		0	0	$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\longrightarrow$	0	$\nearrow$	$f_n(n)$	$\searrow$	0

On peut donc appliquer le résultat de la question 4

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n'(x)| \, \mathrm{d}x = 2 f_n(n)$$

On a donc

$$0 \leqslant \sup_{t \in [0;1]} |\mathbb{P}(\operatorname{frac}(X) \leqslant t) - t| \leqslant f_n(n-1)$$

Or

$$\begin{aligned} f_n(n) &= \frac{n^n}{n!} \exp(-n) \\ &\underset{n\to+\infty}{=\sim} \frac{n^n}{\frac{n^n}{\mathrm{e}^n}\sqrt{2\pi n}} \exp(-n) \\ &\underset{n\to+\infty}{=\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \end{aligned}$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} = 0$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sup_{t \in [0,1]} |\mathbb{P}(\operatorname{frac}(Z_n) \leqslant t) - t| = 0}$$

II Loi de Benford

10. Il est bon de savoir démontrer rapidement les propriétés algébriques du logarithme en base 10 données dans l'énoncé. Commençons par remarquer que $\log_{10}(1) = 0$ et $\log_{10}(10) = 1$, donc l'énoncé et les propriétés d'une fonction de répartition nous permet déduire que la fonction de répartition de X, que l'on note G_X est définie pour $x \in \mathbb{R}$

$$G_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\ln x}{\ln 10} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 1 & \text{si } 10 < x \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(F = 1) &= \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor = 1) \\
&= \mathbb{P}(1 \leqslant X < 2) && \text{définition de partie entière} \\
&= G_X(2) - G_X(1) && \text{définition de partie entière} \\
&= \log_{10}(2) \\
\mathbb{P}(F \in \{2,3\}) &= \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor \in \{2,3\}) \\
&= \mathbb{P}(2 \leqslant X < 4) \\
&= G_X(4) - G_X(2) \\
&= \log_{10}(4) - \log_{10}(2) \\
&= \log_{10}\left(\frac{4}{2}\right) = \log_{10}(2) && \text{propriétés algébrique du } \log_{10} \\
\mathbb{P}(F \in [\![5,9]\!]) &= \mathbb{P}(5 \leqslant X < 10) \\
&= \log_{10}(10) - \log_{10}(5) \\
&= \log_{10}\left(\frac{10}{5}\right) = \log_{10}(2)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(F = 1) = \mathbb{P}(F \in \{2,3\}) = \mathbb{P}(F \in \{5,6,7,8,9\}) = \log_{10}(2)}$$

11. Si X est une variable aléatoire suivant la loi de Benford, $\log_{10}(X)$ a pour support $[0; 1[$
On note H la fonction de répartition de $\log_{10}(X)$. soit $x \in [0; 1[$

$$\begin{aligned}
H(x) &= \mathbb{P}(\log_{10}(X) \leqslant x) \\
&= \mathbb{P}(X \leqslant 10^x) && x \mapsto 10^x \text{ strictement croissante sur } [0; 1[\\
&= \log_{10}(10^x) && \text{fonction de répartition d'une loi de Benford} \\
&= x
\end{aligned}$$

En utilisant le support

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad H(x) \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

On reconnaît donc la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0; 1]$

$$\boxed{\log_{10}(X) \text{ suit la loi } \mathscr{U}([0; 1]).}$$

12. $M(X)$ prend par définition ses valeurs dans $[0;10[$, soit x dans cet intervalle

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M(X)\leqslant x) &= \sum_{i=0}^{k-1}\mathbb{P}\Big(\big[M(X)\leqslant x\big]\cap\big[10^i\leqslant X<10^{i+1}\big]\Big) && \text{proba totales avec SCE } \left(\left[10^i\leqslant X<10^{i+1}\right]\right)_{i\in[\![0,k-1]\!]}\\
&= \sum_{i=0}^{k-1}\mathbb{P}\Big(\big[10^i\leqslant X\leqslant x10^i\big]\Big) && \text{à détailler?}\\
&= \sum_{i=0}^{k-1}F_U(x10^i)-F_U(10^i) && \text{fonction de répartition associée à } \mathscr{U}\left(\left[1;10^k\right[\right.\\
&= \sum_{i=0}^{k-1}\frac{x10^i-1}{10^k-1}-\frac{10^i-1}{10^k-1}\\
&= \frac{x-1}{10^k-1}\sum_{i=0}^{k-1}10^i\\
&= \frac{x-1}{10^k-1}\times\frac{1-10^k}{1-10}\\
&= \frac{x-1}{10-1}
\end{aligned}$$

On reconnaît alors la fonction de répartition la loi uniforme sur $[1;1[0$

$$\boxed{\text{Si } X\hookrightarrow\mathscr{U}\left(\left[1;10^k\right[\right)\text{ alors } M(X)\hookrightarrow\mathscr{U}\left([1;10[\right)}$$

13. Soit x un réel positif, alors il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que

$$x=M(x)\times 10^k$$

On a donc

$$\log_{10}(x)=k+\log_{10}(M(x))$$

comme $M(x)\in[1;10[$, on a $\log_{10}(M(x))\in[0;1[$ et $k\in\mathbb{Z}$ Donc[3]

$$\log_{10}(M(x))=\operatorname{frac}\left(\log_{10}(x)\right)\qquad k=\lfloor\log_{10}(x)\rfloor$$

On peut aussi écrire

$$M(x)=10^{\operatorname{frac}(\log_{10}(x))}$$

Soit x réel strictement positif

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M(X)\leqslant x) &= \mathbb{P}\left(\log_{10}(M(X))\leqslant\log_{10}(x)\right) && \text{fonction croissante}\\
&= \mathbb{P}\left(\operatorname{frac}(\log_{10}(X)\leqslant\log_{10}\right) && \text{remarque précédente}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(M(X)\leqslant x)=\mathbb{P}\left(\operatorname{frac}\left(\log_{10}(X)\right)\leqslant\log_{10}(x)\right).}$$

14. Dans ce cas

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M(Y_n)\leqslant t) &= \mathbb{P}\left(\operatorname{frac}\left(\log_{10}(Y_n)\right)\leqslant\log_{10}(x)\right) && \text{question précédente}\\
&= \mathbb{P}\left(\operatorname{frac}(Z_n)\leqslant\log_{10}(x)\right) && \text{car } Y_n=10^{Z_n}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[1;10]}\left|\mathbb{P}(M(Y_n)\leqslant t)-\log_{10}(t)\right| &= \sup_{t\in[1;10]}\left|\mathbb{P}\left(\operatorname{frac}(Z_n)\leqslant\log_{10}(x)\right)-\log_{10}(t)\right|\\
&= \sup_{u\in[0;1]}\left|\mathbb{P}(\operatorname{frac}(Z_n)\leqslant u)-u\right|
\end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en posant $u=\log_{10}(t)$ et en remarquant que $t\mapsto\log_{10}(t)$ est une bijection de $[1;10[$ dans $[0;1[$. En utilisant la dernière question de la première partie on montre donc :

3. ceci démontre l'unicité et l'existence de k et $M(x)$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in[1;10]} \left|\mathbb{P}(M(Y_n) \leqslant t) - \log_{10}(t)\right| = 0}$$

Cela permet de montrer que la fonction de répartition de $F_{M(Yn)}(t)$ tend vers celle d'une loi de Benford quand n tend vers $+\infty$ et que t est fixé, cela démontre une convergence en loi.

15. Soit $x \in [1; 10[$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M(cY) \leqslant x) &= \mathbb{P}\left(\log_{10}(M(cY)) \leqslant \log_{10}(x)\right) && \text{fonction croissante} \\
&= \mathbb{P}\left(\text{frac}(\log_{10}((cY)) \leqslant \log_{10}(x)\right) && \text{début réponse question 13} \\
&= \mathbb{P}\left(\text{frac}(\log_{10}(Y) + \log_{10}(c)) \leqslant \log_{10}(x)\right)
\end{aligned}$$

16. Soit n un entier relatif tel que

$$c = M(c)10^n$$

Les mantisses prennent leur valeurs dans $[0; 10[$, soit $x \in [1; 10[$

Cas $M(c) < x$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M(cY) \leqslant x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}([M(cY) \leqslant x] \cap [10^k \leqslant cY < 10^{k+1}]) && \text{SCE}^{4}\left([10^k \leqslant cY < 10^{k+1}]\right)_{k\in\mathbb{Z}} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(10^k \leqslant cY \leqslant x10^k) && \text{raisonnement déjà fait} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(10^k \leqslant M(c)10^n Y \leqslant x10^k) && \text{remarque en début de réponse} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(10^{k-n} \leqslant M(c)Y \leqslant x10^{k-n}) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(10^k \leqslant M(c)Y \leqslant x10^k) && \text{on pose } k' = k-1 \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{10^k}{M(c)} \leqslant Y \leqslant \frac{x}{M(c)}10^k\right) && \text{car } M(c) > 1 \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\frac{10^k}{M(c)} \leqslant Y < 10^k\right] \cup \left[10^k \leqslant Y \leqslant \frac{x}{M(c)}10^k\right]\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{10^k}{M(c)} \leqslant Y < 10^k\right) + \mathbb{P}\left(10^k \leqslant Y \leqslant \frac{x}{M(c)}10^k\right) && \text{union disjointe car } \frac{10^k}{M(c)} < 10^k < \frac{x}{M(c)}10^k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}\left(10^{k-1}\frac{10}{M(c)} \leqslant Y < 10^k\right) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}\left(10^k \leqslant Y \leqslant \frac{x}{M(c)}10^k\right) && \text{sous réserve de CV} \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{10}{M(c)} \leqslant M(Y)\right) + \mathbb{P}\left(M(Y) \leqslant \frac{x}{M(c)}\right) && \text{proba totales, séries convergentes} \\
&= 1 - \log_{10}\left(\frac{10}{M(c)}\right) + \log_{10}\left(\frac{x}{M(c)}\right) && \text{loi de Benford} \\
&= \log_{10}(x) && \text{propriétés algébriques } \log_{10}
\end{aligned}$$

cas $M(c) \geqslant x$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(M(cY) \leqslant x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{10^k}{M(c)} \leqslant Y \leqslant \frac{x}{M(c)} 10^k\right) && \text{calculs précédents} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{10}{M(c)} 10^k \leqslant Y \leqslant \frac{10x}{M(c)} 10^k\right) && \text{changement d'indice} \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{10}{M(c)} \leqslant M(Y) \leqslant \frac{10x}{M(c)}\right) && \text{car } 1 \leqslant \frac{10}{M(c)} \leqslant \frac{10}{M(c)} \leqslant 10 \\
&= \log_{10}\left(\frac{10x}{M(c)}\right) - \log_{10}\left(\frac{10}{M(c)}\right) && \text{loi de Benford} \\
&= \log_{10}(x) + \log_{10}\left(\frac{10}{M(c)}\right) - \log_{10}\left(\frac{10}{M(c)}\right) && \text{propriétés algébriques } \log_{10} \\
&= \log_{10}
\end{aligned}
$$

[5]

5. car $\lim_{k\to+\infty} 10^k = +\infty$, $\lim_{k\to-\infty} 10^k = 0$ et on peut indexer $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{N}$