Géométrie : Produit Scalaire

BCPST Spé 2 Lycée Champollion Grenoble

Mars 2025

Table des matières

I Produit scalaire **2**

II Orthogonalité **5**
II.1 Définition 5
II.2 Base orthogonale/orthonormale 6
II.3 Théorème spectral 7

III Projection Orthogonale **7**
III.1 Sous-espace orthogonal 8
III.2 Projection 9

IV Notion de distance **10**
IV.1 Définitions 10
IV.2 Méthode des moindres carrés 11

Dans toute la suite n désigne un entier naturel non nul. Les vecteurs seront notés de préférence $\overrightarrow{u}$. Le terme scalaire désignera uniquement les réels, vecteur désignera un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

I Produit scalaire

Définition 1 (Produit vectoriel canonique)**.**
Soit $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ *et* $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^n$ *le* ***produit scalaire*** *est défini par :*

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

Proposition 1 (Propriétés)**.**

1. *Le produit scalaire est une fonction de* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$.
2. *Le produit scalaire est* ***bilinéaire*** *c'est à dire pour tous vecteurs* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *et pour tous scalaires* α *et* β

   Linéarité à gauche

   $$\langle \alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle =$$

   Linéarité à droite

   $$\langle \overrightarrow{u}, \alpha \overrightarrow{v} + \beta \overrightarrow{w} \rangle =$$

3. *Le produit scalaire est une forme* ***définie positive*** *c'est à dire que pour tout vecteur* $\overrightarrow{u}$.

   Positive $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle \geqslant 0$
   Définie $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle = 0$ *si et seulement si*

Démonstration :

Exercice 1 (Classique :bilinéarité extension)**.**
Soit $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_p}$ et $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_r}$ des vecteurs, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots \mu_r$ des scalaires. Donner une expression de

$$\langle \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{u_i}, \sum_{i=1}^{r} \mu_i \overrightarrow{v_i} \rangle =$$

Définition 2 (Norme euclidienne)**.**
Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathbb{R}^n$, on note

$$\left\|\overrightarrow{u}\right\| =$$

Le vocabulaire n'est pas au programme

Proposition 2 (Propriétés de la norme)**.**
Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et pour tout scalaire λ.

Positivité $\left\|\overrightarrow{u}\right\| \geqslant 0$.

Séparation $\left\|\overrightarrow{u}\right\| = 0$ *si et seulement si* .

Absolue homogénéité $\left\|\lambda\overrightarrow{u}\right\| =$

Démonstration :

Théorème 1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.**
Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs.

Inégalité

$$\left|\langle\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\rangle\right| \leqslant$$

Cas d'égalité valeur absolue :

$$\left|\langle\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\rangle\right| = \left\|\overrightarrow{u}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{v}\right\| \text{ si et seulement si}$$

Cas d'égalité sans valeur absolue :

$$\langle\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v} = \left\|\overrightarrow{u}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{v}\right\|\rangle\ \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont colinéaires de même sens c'est-à-dire}$$

.

Démonstration :

Proposition 3 (Inégalité triangulaire)**.**

Inégalité triangulaire/ sous-additivité :

$$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\| \leqslant \|\overrightarrow{u}\|+\|\overrightarrow{v}\|$$

Cas d'égalité : *De plus il y a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si* **u** *et* $\overrightarrow{v}$ *sont colinéaires et de même sens* i.e. *il existe un réel positif tel que* $\overrightarrow{u}=\lambda v$ *ou* $\overrightarrow{v}=\lambda u$

Démonstration :

Exercice 2 (Classique deuxième inégalité triangulaire)**.**
Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs, montrer que

$$\Big|\|\overrightarrow{u}\|-\|\overrightarrow{v}\|\Big| \leqslant \|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|$$

Dans quel cas a t'on égalité ?

Proposition 4 (Identités remarquables)**.**
Soit $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *deux vecteurs.*

Identité remarquable : $\langle \overrightarrow{u}+\overrightarrow{v},\ \overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\rangle = \|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2$.

Identité remarquable $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2=\|\overrightarrow{u}\|^2+2\langle \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\rangle+\|\overrightarrow{v}\|^2$

Identité remarquable $\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2=$

Égalité du parallélogramme

$$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2+\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2=$$

Identité polaire

$$\langle \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\rangle=\frac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2\right)$$

Démonstration :

Proposition 5 (Expression matricielle : base canonique).
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur dont la matrice colonne des coordonnées dans la base canonique est U et $\overrightarrow{v}$ un vecteur dont la matrice colonne des coordonnées dans la base canonique est V.

Produit scalaire

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = U^T V$$

Norme

$$\| \overrightarrow{u} \|^2 = U^T U$$

Attention : Que vaut UU^{T} ?

II Orthogonalité

II.1 Définition

Définition 3 (Orthogonalité).

Deux vecteurs *On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si*

Deux matrices colonnes *On dit que deux matrices colonne de même taille U V sont **orthogonales** si et seulement si*

Famille orthogonale *Une famille de vecteurs $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ est dite **orthogonale** si et seulement si les vecteurs sont deux à deux orthogonaux.*

Famille orthonormale *Une famille de vecteurs $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ est dite **orthonormale** si et seulement si elle est orthogonale et si et seulement si tous les vecteurs sont de norme 1 .*

On trouve aussi **orthonormée**

Proposition 6 (Liberté d'une famille de vecteurs orthogonaux).
*Une famille de vecteurs $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ **orthogonale** dont **aucun vecteur est nul** est libre.*

Démonstration :

Théorème 2 (Pythagore)**.**
Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs alors

$\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont orthogonaux si et seulement si*

Démonstration :

II.2 Base orthogonale/orthonormale

Définition 4 (Base orthonormale/ orthogonale)**.**
*Une base de $\mathbb{R}^n$ ou d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ qui est aussi une famille orthonormale est dit **base orthonormale**.*

Proposition 7 (Caractérisation matricielle)**.**

ou dans une base orthonormale

Soit $\mathscr{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$ et P la matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}$ exprimés dans la base canonique alors les trois propositions suivantes sont équivalents

1. *$\mathscr{B}$ est une base orthonormale*
2. $P^T P = I_n$
3. $P^{-1} = P^T$

Démonstration :

Proposition 8 (Base canonique)**.**
La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale et il existe d'autres bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 9 (Expression du produit scalaire dans une base orthonormale)**.**
Soit $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ *une base orthonormale de* $\mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{e_i}$ $\overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \overrightarrow{e_i}$ *deux vecteurs. Alors*

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \sum \lambda_i \mu_i \qquad \text{et} \qquad \| \overrightarrow{u} \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

Proposition 10 (Théorème de la base incomplète version orthogonale)**.**
On peut toujours compléter une famille orthonormale en une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$*.*

Proposition 11 (Calcul des coordonnées dans une base orthonormale)**.**
Soit $\overrightarrow{u}$ *un vecteur de* $\mathbb{R}^n$ *et* $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ *une base orthonormale de* $\mathbb{R}^n$*, alors*

$$\overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^{n}$$

Démonstration :
À savoir démontrer, la méthode est aussi importante que le résultat

II.3 Théorème spectral

Théorème 3 (Théorème spectral pour une matrice symétrique)**.**
Soit A *une matrice symétrique réelle alors il existe une matrice inversible* P *et une matrice diagonale telles que*

$$A = PDP^{-1} \qquad P^{-1} = P^T$$

Une matrice symétrique réelle est diagonalisable avec un changement de bases orthonormales

Théorème 4 (Théorème spectral pour un endomorphisme dont la matrice est symétrique)**.**
Soit f *un endomorphisme de* $\mathbb{R}^n$ *dont la matrice représentative dans* ***une base orthonormale (la plus part du temps la base canonique)*** *est symétrique alors il existe une base orthonormale de* $\mathbb{R}^n$ *constituée uniquement de vecteur propre de* f*.*

III Projection Orthogonale

Dans cette partie les sous-espaces vectoriels sont par défaut des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

III.1 Sous-espace orthogonal

Définition 5 (Orthogonal d'un sous-espace vectoriel)**.**
Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on note

$$E^{\perp} = \left\{ \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n / \forall \overrightarrow{v} \in E \qquad \langle \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v} \rangle = 0 \right\}$$

Exemple : Calculons l'orthogonal de $\left\{ (x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \right\}$

Proposition 12 (Structure de $E^{\perp}$)**.**
Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors $E^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration :

Proposition 13 (Décomposition dans $E, E^{\perp}$)**.**
Soit E unsous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$

1. *Pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n$ il existe un unique couple $\left(\overrightarrow{u_E},\ \overrightarrow{u_{E^{\perp}}} \right) \in E \times E^{\perp}$ tel que*
$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_E} + \overrightarrow{u_{E^{\perp}}}$$
2. $\text{Dim } E + \text{Dim } E^{\perp} = \text{Dim } \mathbb{R}^n = n$

Démonstration :

III.2 Projection

Définition 6 (Projection orthogonale)**.**
Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ on reprend les notations de la proposition 13 et on définit

$$p_E : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \overrightarrow{u} & \longmapsto & \overrightarrow{u_E} \end{array}$$

*p_E est la **projection orthogonale** sur E (parallèlement à $E^\perp$.)*

Exemple : Calculons la projection sur $E = \left\{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 \middle/ x + y = y + z = 0)\right\} \subset \mathbb{R}^3$

Proposition 14 (Propriétés d'une projection orthogonale)**.**

1. *p_E est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans lui même.*
2. *Soit $(\overrightarrow{e_1},\ \ldots,\ \overrightarrow{e_p})$ une base orthonormale de F alors*

$$\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n \qquad p_E(\overrightarrow{u}) = \sum_{i=1}^{p} \langle \overrightarrow{e_i},\ u\rangle \overrightarrow{e_i}$$

3. *La projection orthogonale sur le sous-espace F est l'unique endomorphisme p de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $p \circ p = p$, $\mathrm{Im}\,(p) = F$ et $\mathrm{Ker}\,(p) = F^\perp$*

Démonstration :

Exercice 3.
On se place dans $\mathbb{R}^4$. soit $E = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \middle/ x + y + z + t = 0\right\}$

1. On pose $\overrightarrow{u} = (1, -1, 0, 0)$, $\overrightarrow{v} = (1, 1, -2, 0)$ et $\overrightarrow{w} = (1, 1, 1, -3)$ est une base orthogonale de E.
2. La transformer en une base orthonormale de E
3. Trouver une base orthonormale de $E^\perp$
4. Donner une expression simple de p_E et $p_{E^\perp}$

Démonstration :

IV Notion de distance

IV.1 Définitions

Définition 7 (Distance)**.**

Entre deux vecteurs *Soit* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^n$*, la* ***distance*** *entre* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{b}$ *est*

$$d(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|$$

Entre un vecteur et une partie *Soit* A *une partie non vide de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\overrightarrow{u}$ *un vecteur , alors* ***la distance*** *entre* $\overrightarrow{u}$ *et* A *est définie par*

$$d(\overrightarrow{u},\ A) = \inf\left\{d(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \big/ \overrightarrow{v} \in A\right\}$$

Exemple :

Proposition 15 (Propriétés de la distance entre deux vecteurs)**.**
Soit $\overrightarrow{u}$*,* $\overrightarrow{v}$*, et* $\overrightarrow{w}$ *trois vecteurs de* $\mathbb{R}^n$

Le vocabulaire n'est pas au programme

Symétrie $d(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) = d(\overrightarrow{v},\ \overrightarrow{u})$

Séparation $d(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) = 0$ *si et seulement si* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$.

Inégalité triangulaire $d(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \leqslant d(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{w}) + d(\overrightarrow{w},\ \overrightarrow{v})$

Proposition 16 (Distance et projection)**.**
Soit F *un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\overrightarrow{u}$ *un vecteur de* $\mathbb{R}^n$*, alors*

$$d(\overrightarrow{u},\ F) = \|\overrightarrow{u} - p_F(\overrightarrow{u})\|$$

Autrement dit le vecteur de F *le plus proche de* $\overrightarrow{u}$ *est* $p_F(\overrightarrow{u})$

Démonstration :

IV.2 Méthode des moindres carrés

On suppose que l'on possède deux séries de données mesurées sur une même population

$$x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \qquad \text{et} \qquad y = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$$

On suppose de plus que les données de x ne sont pas constantes.

Définition 8 (Régression linéaire)**.**
Une (la) droite de régression est la droite d'équation $y = ax + b$ qui minimise la quantité

$$\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (ax_i + b)\right)^2$$

Théorème 5 (Forme théorique)**.**
On note $\overrightarrow{x} = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ le vecteur associé à la série x.
On note $\overrightarrow{y} = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$ le vecteur associé à la série x.
On note $\overrightarrow{u} = (1,\ 1,\ \cdots,\ 1)$ et $F = \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{x}\right)$ alors le minimum de la quantité $\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (ax_i + b)\right)^2$, quand a et b décrivent $\mathbb{R}$, vaut

$$m = d(\overrightarrow{y}, F)$$

Ce minimum est atteint pour un unique couple (a, b) qui vérifie

$$p_F(\overrightarrow{y}) = a\overrightarrow{x} + b\overrightarrow{u}$$

Démonstration :

Proposition 17 (Forme pratique)**.**
En reprenant les notations précédentes, la droite de régression linéaire est la droite $y = ax + b$ où

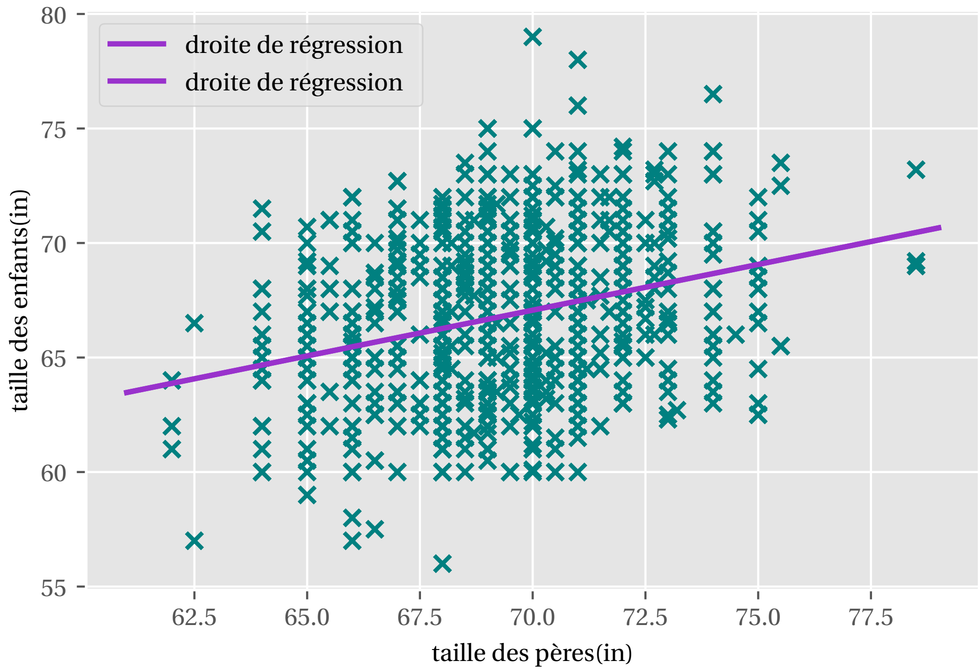
- $a = \dfrac{\sigma^2_{x,y}}{\sigma^2_x}$.
- $b = \overline{y} - \dfrac{\sigma^2_{x,y}}{\sigma^2_x}\overline{x}$
- $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ *moyenne de* x.
- $\overline{y} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i$ *moyenne de* y.
- $\sigma^2_x = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(x_i - \overline{x}\right)^2$ *variance*.
- $\sigma^2_{x,y} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right) = \dfrac{1}{n}\langle \overrightarrow{x} - \overline{x}\cdot\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{y} - \overline{y}\cdot\overrightarrow{u}\rangle$ *covariance.*

Remarque : *On remarque que la droite passe par le point moyen du nuage* $(\overline{x},\ \overline{y})$.

L'exemple historique de Galton "régression vers la moyenne" Même si la méthode des moindres carrées avait déjà été utilisée par Gauss, Dirichlet ... c'est Francis Galton [1] géographe, inventeur, météorologue, écrivain, proto-généticien, psychométricien et statisticien que l'on crédite de son invention. Il est un des premiers défenseurs de la théorie de l'évolution de son cousin Charles Darwin, il est aussi l'un des fondateur de l'eugénisme moderne.

Il utilise la méthode des moindres carrées pour étudier la relation entre les la tailles des parents et des enfants.

1. 16 février 1822 – 17 janvier 1911


droite de régression
droite de régression
80
75
70
65
60
55
62.5
65.0
67.5
70.0
72.5
75.0
77.5
taille des enfants(in)
taille des pères(in)