Produit scalaire

Révisions : géométrie du plan

Exercice 1 (Différents types d'équation de droite dans le plan)**.**
Le plan étant muni d'un repère orthonormal.

1. Donner une équation cartésienne de la droite
$$\begin{cases} x = 3+2t \\ y = 1-t. \end{cases}$$
2. Donner une représentation paramétrique de la droite d'équation $2x-3y=4$.

Exercice 2 (Projeté orthogonal d'un point sur une droite)**.**
Le plan étant muni d'un repère orthonormal, on considère les points $A(-1,1)$, $B(3,-1)$ et $C(1,4)$. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

Exercice 3 (Cercles)**.**
Le plan étant muni d'un repère orthonormal. Soit $A(0,0)$, $B(2,1)$ et $C(2,3)$.

1. Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$.
2. Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 4 (Équation de la tangente)**.**
Le plan étant muni d'un repère orthonormal. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $I(a,b)$ et de rayon R. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(u,v,w)\in\mathbb{R}^3$ pour que la droite d'équation $ux+vy+w=0$ soit tangente à $\mathscr{C}$.

Exercice 5.
Le plan étant muni d'un repère orthonormal. Donner l'équation du plan passant par $A(1,-\sqrt{2})$ et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}=(1,8)$ et $\overrightarrow{v}=(-1,56)$.

Révisions : Géométrie de l'espace

Exercice 6 (Équation d'un plan donné par deux vecteurs directeurs.)**.**
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, donner une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par le point $A(1,0,1)$ et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}(1,1,0)$ et $\overrightarrow{v}=(0,1,1)$.

Exercice 7 (D'un type d'équation à l'autre)**.**
On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

1. Donner une équation cartésienne du plan de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = & 1+t+2u \\ y = & 2+t+u \\ z = & 3u \end{cases} ,(t,u)\in\mathbb{R}^2$$
2. Donner une représentation paramétrique du plan d'équation $x+2y-z-3=0$.
3. Donner un système d'équations définissant la droite dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = & 4t+5 \\ y = & 3t+1 \\ z = & t+3 \end{cases} ,t\in\mathbb{R}.$$
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite donnée par le système d'équations :
$$\begin{cases} x+y-3z+1 & =0 \\ 2x+y-5z & =0. \end{cases}$$

Exercice 8 (Équation d'un plan passant par trois points)**.**
On munit l'espace d'un repère $(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k})$.

Parmi les équations cartésiennes ou représentations paramétriques suivantes quelles sont celles qui correspondent à l'unique plan $\mathscr{P}$ passant les trois points $A(1,1,0)$, $B(-1,0,4)$ et $C(2,2,-1)$?

1. $3x-2y+z-1=0$;
2. $\begin{cases} x &=& 1-s+3t \\ y &=& 1+2t \\ z &=& 3s-5t \end{cases} \quad , \quad s,t\in\mathbb{R}$
3. $\begin{cases} x &=& 1-s \\ y &=& -1+2t \\ z &=& 2s \end{cases} \quad , \quad s,t\in\mathbb{R}.$
4. $2x+z-2=0$;

Exercice 9 (Point d'intersection de deux droites)**.**
L'espace est muni d'un repère $(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k})$. On considère les deux droites d et d' de représentation paramétrique respective
$$\begin{cases} x &=& 3+2t \\ y &=& -1-t \\ z &=& 4+3t \end{cases} ,t\in\mathbb{R} \qquad \begin{cases} x &=& 1-3t \\ y &=& 1+t \\ z &=& 2-5t \end{cases} ,t\in\mathbb{R}.$$

Démontrer que les droites d et d' sont sécantes en un point A dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 10 (Droites définies par des contraintes)**.**
Trouver les droites passant par le point $A=(2,3,1)$, parallèles au plan $P : 2x-5y+4z-1=0$ et sécantes à la droite $D : 2x-y+1=z=0$.

Exercice 11 (Projection orthogonale)**.**
L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère les trois points $A(-1,1,2)$, $B(0,0,1)$ et $C(0,-1,-2)$.

1. Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Soit M le point de coordonnées $(8,10,5)$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d passant par M et orthogonale au plan (ABC).
4. Déterminer les coordonnées du point H, point d'intersection de d et de (ABC).

Exercice 12 (Projeté orthogonal)**.**
Déterminer le projeté orthogonal H du point $M(u,v,w)$ sur le plan $\mathscr{P}$ déterminé par les trois points $A(1,2,3)$, $B(0,1,5)$ et $C(2,3,4)$.

Exercice 13 (Perpendiculaire commune)**.**
Déterminer la perpendiculaire commune à $(D1)$ et $(D2)$, puis la distance de $(D1)$ à $(D2)$ lorsque

1. $(D1)$ est la droite donnée par la représentation paramétrique $(x=3+2t, y=1+t, z=2-t)$ et $(D2)$ est la droite donnée par le système d'équations cartésiennes $(3x+2y+4z+8=0,\ x+y+z=0)$.
2. $(D1)$ est la droite d'équation $(x+z=2,\ y=-1)$ et $(D2)$ est la droite d'équation $(y-z+1=0,\ x+y=0)$.

Application du cours

Exercice 14.
On pose $\overrightarrow{e_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\overrightarrow{e_2} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ et $\overrightarrow{e_3} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

1. Montrer que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ forme une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$
2. soit $\vec{u} = (x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3$ calculer les coordonnées de $\vec{u}$ dans cette base.

Exercice 15.
On pose $\overrightarrow{e_1} = (0,1,-1)$, $\overrightarrow{e_2} = (1,0,0)$ et $\overrightarrow{e_3} = (0,1,1)$

1. Montrer que $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ forme une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$
2. Trouver des réels α, β et γ tels que $(\alpha\overrightarrow{e_1},\ \beta\overrightarrow{e_2},\ \gamma\overrightarrow{e_3})$ forme une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$
3. soit $\vec{u} = (x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3$ calculer les coordonnées de $\vec{u}$ dans ces deux bases.

Exercice 16 (Orthonormalisation d'une base)**.**
Soit $\overrightarrow{u_1} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{u_2} = (1,1,0)$ et $\overrightarrow{u_3} = (1,1,1)$

1. Montrer que $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Est elle orthonormale ? orthogonale ?
2. Trouver un réel α tel que $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{u_2} + \alpha\overrightarrow{u_1}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{u_1}$
3. Trouver des réels β et γ tels que $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{u_3} + \beta\overrightarrow{u_1} + \gamma\overrightarrow{e_2}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{e_2}$ et à $\overrightarrow{u_1}$.
4. Montrer que $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$, en déduire une base orthonormale.
5. Recommencer ce procédé avec la famille $((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0))$

Utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercice 17 (Classique)**.**
Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels.

1. Démontrer que
$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$
et étudier les cas d'égalité.
2. On suppose en outre que $x_k > 0$ pour chaque $k \in \{1, \ldots, n\}$. Démontrer que :
$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \geqslant n^2$$
et étudier les cas d'égalité.

Exercice 18 ()**.**

1. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 0$,
$$\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}} \leqslant 2^{n/2}\sqrt{n+1}.$$
2. En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^2(\sqrt{2})^n} \sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}}$.

Exercice 19 ()**.**
Démontrer que pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$,
$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2^k}\right)^2 \leqslant \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Exercice 20.
Soit x, y, z trois réels tels que $2x^2 + y^2 + 5z^2 \leqslant 1$. Démontrer que $(x+y+z)^2 \leqslant \frac{17}{10}$.

Projection orthogonale et réduction

Exercice 21 (Une projection)**.**
Soit $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 2z = 0\right\}$

1. Donner une équation et une base de $E^{\perp}$
2. Donner une expression de p_E
3. Donner une expression de $p_{E^{\perp}}$.

Exercice 22 (Une projection)**.**
Soit $\overrightarrow{e_1} = (1,1,0)$ et $\overrightarrow{e_2} = (0,-1,1)$ deux vecteurs

1. Donner une équation cartésienne et une représentation paramétrique du plan vectoriel $\mathscr{P}$ engendré par $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$.
2. Donner une équation cartésienne et une représentation paramétrique de $\mathscr{P}^{\perp}$.

3. Donner une expression de la projection orthogonale sur $\mathscr{P}$.

Exercice 23 (Une projection)**.**
Soit $\overrightarrow{e} = (1, 1, 1)$

1. Donner une équation cartésienne et une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ engendré par $\overrightarrow{e}$.
2. Donner une équation cartésienne et une représentation paramétrique de $\mathscr{D}^{\perp}$.
3. Donner une expression de la projection orthogonale sur $\mathscr{D}$.

Exercice 24 (Réduction de matrice symétrique)**.**
Diagonaliser dans une bases orthonormale les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 25 (Réduction de matrice symétrique)**.**
Diagonaliser dans une bases orthonormale les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 26 (Réduction de matrice symétrique)**.**
Diagonaliser dans une bases orthonormale la matrices suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 27 (Orthogonal d'un sous-espace vectoriel dégénéré)**.**
On se place dans $\mathbb{R}^n$, donner $\{0\}^{\perp}$ et $\mathbb{R}^{n\perp}$

Exercice 28 (Propriétés de l'orthogonal)**.**
Soit F et G des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

1. Montrer que $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$
2. A t'on $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$?

Exercice 29 (Calcul d'orthogonal)**.**
Dans chacun des cas calculer $E^{\perp}$

1. $E = \left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 / x - y = 0\right\}$
2. $E = \left\{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 / x - y = y - z = 0\right\}$
3. $E = \left\{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\right\}$
4. $E = \left\{(x_1,\ \dots,\ x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 + x_2 + \cdots x_n = 0\right\}$

Exercice 30 (Orthogonal et base)**.**
1. Soit $(\overrightarrow{e_1},\ \dots,\ \overrightarrow{e_n})$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ exprimer simplement l'orthogonal de $\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{e_1},\ \dots,\ \overrightarrow{e_p}\right)$ où $\in [\![1,\ n-1]\!]$
2. Soit E et F deux sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on note $(\overrightarrow{e_1},\ \dots,\ \overrightarrow{e_p})$ une base orthonormale de E et $(\overrightarrow{f_1},\ \dots,\ \overrightarrow{f_r})$ une base orthonormale de F, montrer que $F = E^{\perp}$ si et seulement si $(\overrightarrow{e_1},\ \dots,\ \overrightarrow{e_p},\ \overrightarrow{f_1},\ \dots,\ \overrightarrow{f_r})$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 31 (sous-espaces vectoriels orthogonaux)**.**
Soit F et G deux sous-espace vectoriel . On dit que F et G sont orthogonaux si et seulement si

$$\forall \overrightarrow{u} \in F,\ \forall \overrightarrow{v} \in G \qquad \langle \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v} \rangle = 0$$

1. Montrer que si F et G sont orthogonaux alors $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$
2. Montrer que F et $F^{\perp}$ sont orthogonaux.
3. Si F et G sont orthogonaux, et si G et H sont orthogonaux qu'n est il de F et H.
4. Soit $(\overrightarrow{e_1},\ \dots, \overrightarrow{e_p})$ une base de F et $(\overrightarrow{f_1},\ \dots, \overrightarrow{f_r})$ une base de G, montrer que F et G sont orthogonaux si et seulement si

$$\forall i \in [\![1,\ p]\!],\ \forall j \in [\![1,\ r]\!] \qquad \langle \overrightarrow{e_i},\ \overrightarrow{f_j} \rangle = 0$$

Exercice 32 (Caractéristiques d'une projection)**.**
Soit p_F la projection orthogonale sur F sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, et $p_{F^{\perp}}$ la projection orthogonale sur $F^{\perp}$. Démontrer les propriétés suivantes

1. $p_F \circ p_F = p_F$
2. $\mathrm{Ker}\ p_F = F^{\perp}$ et $\mathrm{Im} p_F = F$
3. $p_F \circ p_{F^{\perp}} = 0$ et $p_F + p_{F^{\perp}} = \mathrm{id}_{R^n}$.
4. On suppose de plus que $F \neq \{0\}$ et $F \neq \mathbb{R}^n$, montrer alors que les valeurs propres de p_F sont 0 et 1 et donner les sous espaces propres associés.

Statistiques

Exercice 33 (Ecart-moyen et écart-type)**.**
On appelle écart-moyen de la série statistique $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ le réel

$$e = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$$

Démontrer que l'écart-moyen est toujours inférieur ou égal à l'écart-type σ_X (conseil : utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

Exercice 34 (Droite des moindres carrés)**.**
On considère une série statistique à deux variables $\{(x_i, y_i);\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$. On note D_1 la droite de régression de Y par rapport à X et D_2 la droite de régression de X par rapport à Y. Démontrer que $D_1 = D_2$ si et seulement si tous les points (x_i, y_i) sont alignés.

Autres

Exercice 35 (Géométrie du triangle)**.**
Le but de l'exercice est de démontrer que, dans un triangle ABC, les trois bissectrices intérieures sont concourantes et que le point d'intersection est le centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle. Pour cela, on considère P le plan munit du produit scalaire usuel, D et D' deux droites distinctes de E, u et v des vecteurs directeurs unitaires de respectivement D et D'. On pose $w_1 = u + v$ et $w_2 = u - v$, D_1 la droite dirigée par w_1 et D_2 la droite dirigée par w_2.

1. Démontrer que $\langle u, v\rangle \in]-1,1[$.
2. Démontrer que $D_1 = D_2^{\perp}$.
3. Soit $x = \alpha u + \beta v$ un vecteur de E. Calculer $d(x, D)^2$ et $d(x, D')^2$ en fonction de α, β, u et v.
4. Démontrer que $d(x, D) = d(x, D') \iff x \in D_1 \cup D_2$.
5. On suppose que x est non nul. Démontrer que $x \in D_1$ si et seulement si $\cos\left(\widehat{(u,x)}\right) = \cos\left(\widehat{(v,x)}\right)$.
6. En déduire le résultat annoncé au début de l'exercice.

Problèmes

Exercice 36 (D'après M.Bacquelin)**.**

Soit a un réel et M_a la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Réduction de la matrice** M_{a}
   (a) La matrice M_{a} est-elle diagonalisable?
   (b) Selon les valeurs de a, donner l'ensemble des valeurs propres de M_a ainsi qu'une bases chaque sous-espace propre.
   (c) Trouver une matrice P, inversible et une matrice diagonale D_a dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M_a = P D_a P^T$.
   (d) Pour tout entier naturel n, exprimer la matrice M_a^n.
2. **Quelques considérations particulières.**
   (a) On suppose $a = -2$. Donner le plus grand entier naturel n pour lequel la famille $\left(I_3, M_a, \ldots, M_a^n\right)$ est libre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) On suppose $a = 2$ Montrer que $\frac{1}{2} M_a$ est la matrice, dans la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, de la projection orthogonale sur E_2.

Exercice 37 (D'après M.Bacquelin)**.**

1. On considère les vecteurs $\overrightarrow{u} = (1;0;0)$, $\overrightarrow{v} = \sqrt{2}(0;1;0)$, $\overrightarrow{w} = \sqrt{2}(0;0;1)$ et $\mathscr{P}$ le plan de $\mathbb{R}^3$ admettant pour équation dans la base canonique :

$$y - z = 0.$$

   Déterminer les projetés orthogonaux des vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ sur le plan $\mathscr{P}$ et vérifier qu'ils ont même norme.
2. Soit $\left(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_3}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et a_1, a_2, a_3 trois réels tous non nuls. On suppose qu'il existe un plan $\mathscr{Q}$ tel que les projetés orthogonaux des vecteurs $a_1\overrightarrow{e_1}, a_2\overrightarrow{e_2}$ et $a_3\overrightarrow{e_3}$ sur ce plan aient tous la même norme que l'on notera d.
   On considère $\left(\overrightarrow{\varepsilon_1}; \overrightarrow{\varepsilon_2}\right)$ une base orthonormée de P_{et} $\overrightarrow{\varepsilon}_3$ vecteur normal à $\mathscr{Q}$ de norme 1 .
   On note p la projection orthogonale sur le plan $\mathscr{Q}$.
   (a) Donner une expression de $p\left(\overrightarrow{e_i}\right)$ pour $i \in \{1,2,3\}$ à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{\varepsilon_1}$ et $\overrightarrow{\varepsilon_2}$.
   (b) Montrer que pour tout $i \in \{1,2,3\}$, on a :

$$\langle \overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{\varepsilon_1}\rangle^2 + \langle \overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{\varepsilon_2}\rangle^2 = \left(\frac{d}{a_i}\right)^2$$

   (c) Montrer que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{a_i^2} = \frac{2}{d^2}$.
   (d) Pour tout $i \in \{1,2,3\}$, montrer que $\left|a_i\right| \geqslant d$ puis que :

$$a_i^2 \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{a_k^2} \geqslant 2$$