DL mathématiques n°15
Réponses

SUJET D'ORAL

1. (a) On a

$$\begin{cases} f(1,0,0) = (1,0,-1) = (1,0,0) + (-1)(0,0,1) \\ f(0,1,0) = (1,2,1) = (1,0,0) + 2(0,1,0) + (0,0,1) \\ f(0,0,1) = (-1,0,1) = (-1)(1,0,0) + (0,0,1) \end{cases} \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) On détermine ici les valeurs propres de B qui sont les mêmes que celles de g et les vecteurs propres de A qui sont les matrices des coordonnées des vecteurs propres de f dans la base canonique.

```
import numpy as np

B=np.array([[0,-2,-5], [-2,0,4],[1,1,0]])
A=np.array([[1,1,-1],[0,2,0],[-1,1,1]])

valp_B,vectp_B=np.linalg.eig(B)
print(valp_B)
valp_A,vectp_A=np.linalg.eig(A)
print(valp_A,vectp_A)
```

On obtient pour les valeurs propres de g : `array([-1.+5.14735954e-08j, -1.-5.14735954e-08j, 2.+0.00000000e+0`
Les deux premières valeurs propres de la listes semblent au départ complexe mais en fait la partie imaginaire est très petite (de l'ordre de 10^{-8}) donc on peut la considérer nulle. Il semble donc que $\mathrm{sp}(g) = \{-1, 2\}$.
Pour les valeurs propres de A on a `array([2., 0., 2.])` et pour les vecteurs propres de A on obtient `[[ 0.70710678 0.70710678 0.40824829] [ 0. 0. 0.81649658] [-0.70710678 0.70710678 0.40824829]]`.
Il semble donc que f admette deux valeurs propres (0 et 2) et que $\mathrm{Dim}\,(E_2(f)) = 2$ et $\mathrm{Dim}\,(E_0(f)) = 1$.

2. (a) On a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u, v, e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $\mathrm{rg}\,(u, v, e_1) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$ (obtenu en permutant les colonnes de la matrice ci-dessus).

La famille (u, v, e_1) est une famille de rang 3 de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) On a

$$\begin{cases} g(u) = g(e_1) - g(e_2) = (2,-2,0) = 2u \\ g(v) = g(1,-2,1) = (-1,2,-1) = -v \\ g(e_1) = v - e_1 \end{cases} \implies T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) On sait que les valeurs propres de g sont égales aux valeurs de propre de sa matrice dans n'importe quelle base donc $\mathrm{sp}(g) = \mathrm{sp}(T)$. T est triangulaire, il suffit de lire ses valeurs propres sur la diagonale.
On retrouve bien que $\mathrm{sp}(g) = \{-1, 2\}$.
On sait, d'après le théorème du rang, que $\mathrm{Dim}\,(E_\lambda(g)) = 3 - \mathrm{rg}\,(g - \lambda \mathrm{id}_) = 3 - \mathrm{rg}\,(T - \lambda I_3)$.
Or on a $\mathrm{rg}\,(T - 2I_3) = 2$ et $\mathrm{rg}\,(T - (-1)I_3) = 2$ donc $\mathrm{Dim}\,(E_2(g)) + \mathrm{Dim}\,(E_{-1}(g)) = 1 + 1 = 2 \neq 3$.
g n'est pas diagonalisable.

3. (a)
```
def E(M):
    global A,B
    C=np.dot(A,M)==np.dot(M,B)
    return C.all()
```
   (b) Par définition, $E \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   De plus, $A \times 0_3 = 0_3 = 0_3 \times B$ donc $0_3 \in E$, et E n'est pas vide.
   Et enfin, pour tout $(M,N) \in E^2$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha M + N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et :
$$A(\alpha M + N) = \alpha AM + AN = \alpha MB + NB = (\alpha M + N)B.$$
   Donc $\alpha M + N \in E$.
   En conclusion E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (c) Supposons que $M \in E$ et M est inversible.
   On pourrait alors écrire $A = MBM^{-1}$ ce qui signifie que A et B sont semblables et ont les mêmes valeurs propres. Comme A et B n'ont pas les mêmes valeurs propres, ceci est absurde et donc M ne peut pas appartenir à E et être inversible.
   (d) On sait que, pour tout réel λ, $\mathrm{rg}\,(B - \lambda I_3) = \mathrm{rg}\,((B-\lambda I_3)^T) = \mathrm{rg}\,(B^T - \lambda I_3)$.
   Donc $\mathrm{sp}(B) = \mathrm{sp}(B^T)$.
   (e) On se donne X vecteur propre de A associé à la valeur propre 2 et Y vecteur propre de B^T associé à la valeur propre 2.
   On a alors $XY^T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et
$$AXY^T = 2XY^T \qquad \text{et} \qquad XY^TB = X(B^TY)^T = 2XY^T.$$
   Donc $XY^T \in E$.
   (f) $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2 et $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B^T associé à la valeur propre 2.
   Donc $X_1Y^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in E$.
   On a aussi $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2 donc $X_2Y^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in E$.
   Ainsi $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right)$ est une famille visiblement libre de deux éléments de E donc $\mathrm{Dim}\,(E) \geqslant 2$.

Exercice facultatif

1. (a)
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$A = \begin{pmatrix} x_1x_1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2x_2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_nx_n \end{pmatrix} = \left(x_ix_j\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

$$\boxed{\text{La matrice est symétrique réelle donc diagonalisable.}}$$

(b) D'après le cours, et comme f est définie sur l'ensemble des matrices colonnes

$$\text{Im } f = \text{Im } A = \text{Vect}\,(A_1, A_2, \ldots, A_n)$$

où A_1, A_2, … A_n sont les colonnes de la matrice A. Or

$$A_1 = \begin{pmatrix} x_1x_1 \\ x_2x_1 \\ x_3x_1 \\ \vdots \\ x_nx_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 X \qquad A_2 = \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ x_2x_2 \\ x_3x_2 \\ \vdots \\ x_nx_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_2 X \qquad \ldots$$

On constate donc que pour $i \in [\![1,\, n]\!]$ $A_i = x_i X$, donc comme au moins l'un des coefficient x_i est non nul

$$\text{Im } f = \text{Vect}\,(X)$$

Comme X est non nul

$$\boxed{(X) \text{ est une base de Im } f.}$$

Ce qui montre

$$\text{Dim Im } f = 1$$

D'après le théorème du rang

$$\text{Dim Ker } f + \text{Dim Im } f = \text{Dim } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = n$$

La dernière égalité est obtenue en utilisant le cardinal de la base de Dim $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ fournie par l'énoncé.
Donc

$$\text{Dim Ker } f = n - 1$$

Soit $\alpha_1,\ldots,\, \alpha_n$ des réels

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \text{Ker } f \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_1\alpha 1 + x_1x_2\alpha_2 + \cdots x_1x_n\alpha_n & = 0 \\ x_2x_1\alpha 1 + x_2x_2\alpha_2 + \cdots x_2x_n\alpha_n & = 0 \\ \vdots & = \vdots \\ x_nx_1\alpha 1 + x_nx_2\alpha_2 + \cdots x_nx_n\alpha_n & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots x_n\alpha_n = 0 \qquad \text{toutes les lignes du système sont équivalentes à celle ci}$$

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \Big/ x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots x_n\alpha_n = 0 \right\} \text{ et Dim Ker } f = n-1}$$

(c)

$$\begin{aligned} AX &= \left(XX^{\mathrm{T}}\right)X \\ &= X\left(X^{\mathrm{T}}X\right) \\ &= \alpha X \end{aligned}$$

$$\boxed{AX = \alpha X}$$

0 est valeur propre de multiplicité $n-1$ comme vu lors du calcul du noyau.

Dans la question précédente, comme X est un vecteur non nul et $\alpha \neq 0$, on a montré que α est une valeur propre dont un vecteur propre associé est X. Donc la multiplicité de α est au moins 1. Comme la somme des dimensions des sous espaces propres est inférieure où égale à la taille de la matrice, il n'existe pas d'autre valeur propre et on a trouvé une base du sous-espace vectoriel propre associé à α

$$\boxed{\operatorname{Sp}(f) = \{0, \alpha\} \text{ et l'espace propre associé à } \alpha \text{ est } \operatorname{Vect}((X)) = \operatorname{Im} f\text{, celui associé à 0 est Ker } f.}$$

2. (a) On sait que le rang d'une matrice est égal au rang de la famille formée par les vecteurs colonnes de la matrice. Par hypothèse la famille $(V_1, V_2, ..., V_p)$ est libre donc son rang est égal à son cardinal.

$$\boxed{\operatorname{rg} V = p}$$

Soit $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} g \Leftrightarrow V \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} &= 0_{\mathscr{M}_{p,1}} \\ \Leftrightarrow \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \cdot \alpha_p V_p &= 0_{\mathscr{M}_{p,1}} && \text{produit d'une matrice par une colonne} \\ \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p &= 0 && \text{car la famille } (V_1, V_2, \ldots, V_p) \text{ est libre} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ker } g = \{0_{\mathscr{M}_{p,1}}\}}$$

(b) Si l'on suppose que $VY = 0$ alors $V^{\mathrm{T}}(VY) = V^{\mathrm{T}}0 = 0$.
Supposons maintenant que

$$V^{\mathrm{T}}VY = 0$$

alors

$$Y^{\mathrm{T}}V^{\mathrm{T}}VY = 0$$

Donc

$$(VY)^{\mathrm{T}}VY = 0$$

or VY est une matrice colonne de $\mathscr{M}_{n,1}$ que nous notons

$$VY = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Donc

$$(VY)^{\mathrm{T}}VY = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = 0$$

donc comme somme de carrée

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \qquad y_i = 0$$

Donc $VY = 0$

$$\boxed{VY = 0 \text{ si et seulement si l'on a } V^{\mathrm{T}}VY = 0.}$$

(c) $V^{\mathrm{T}}V$ est une matrice carrée de $\mathscr{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ de plus d'après la question précédente

$$\text{Ker } V^{\mathrm{T}}V = \text{Ker } V$$

et d'après la question 2a

$$\text{Ker } V = \{0_{\mathscr{M}_{p,1}(R)}\}$$

donc l'application canoniquement associée à $V^{\mathrm{T}}V$ est un endormorphisme injective donc bijective, donc

$$\boxed{V^{\mathrm{T}}V \text{ est inversible.}}$$