DL mathématiques n°14
Réponses

1. (a) On a tout d'abord $X(\Omega) =]0;+\infty[$ car U est à valeurs dans $]0;1[$.

   Pour tout $x \leqslant 0$, $F_X(x) = 0$ car l'événement $[X \leqslant x]$ est impossible.

   Pour $x > 0$, $F_X(x) = P(-\ln(U) \leqslant x) = P(U \geqslant e^{-x}) = 1 - P(U < e^{-x}) = 1 - e^{-x}$.

   On remarque alors que la fonction de répartition de X est la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 1.

   Donc $\boxed{X \text{ est bien une variable à densité et suit une loi exponentielle de paramètre } 1.}$

   (b)
```
from random import random
from math import log

def simulX():
    return -log(random())
```

2. (a)
```
def simulY():
    return int(simulX())
```

   (b) Comme $X(\Omega) = \mathbb{R}^{+*}$, on a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ par définition de la notion de partie entière.

   (c)

   * Pour $n = 0$ on a $P(Y = 0) = P(X < 1) = \int_{-\infty}^{1} f(t)\,dt = \int_0^1 e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^1 = 1 - e^{-1}$

     et $\left(1 - \frac{1}{e}\right)e^{-0} = 1 - e^{-1}$

     Donc l'égalité est vraie pour $n = 0$.
   * Soit n un entier strictement positif

$$
\begin{aligned}
P(Y = n) &= P(n \leqslant X < n+1) \\
&= \int_n^{n+1} e^{-t}\,dt \qquad \text{car } n > 0 \\
&= \left[-e^{-t}\right]_n^{n+1} \\
&= -e^{-(n+1)} + e^{-n} \\
&= e^{-n}\left(1 - \frac{1}{e}\right)
\end{aligned}
$$

   $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n : P(Y = n) = \left(1 - \frac{1}{e}\right)e^{-n}}$

   (d) On a $Y + 1(\Omega) = \mathbb{N}^*$

   Et pour $n \in \mathbb{N}^*$: $(Y + 1 = n) = (Y = n - 1)$ donc

$$P(Y + 1 = n) = \left(1 - \frac{1}{e}\right)e^{-n+1} = \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

   Donc $\boxed{Y + 1 \text{ suit une loi géométrique de paramètre } 1 - e^{-1}.}$

   Donc on a $E(Y + 1) = \dfrac{1}{1 - e^{-1}} = \dfrac{e}{e - 1}$ et par linéarité de l'espérance $E(Y + 1) = E(Y) + 1$. Donc $\boxed{E(Y) = \dfrac{1}{e - 1}.}$

   De plus par propriété de la variance $V(Y) = V(Y + 1)$ donc $\boxed{V(Y) = \dfrac{e^{-1}}{\left(1 - e^{-1}\right)^2} = \dfrac{e}{(e - 1)^2}.}$

   (e) $Y + 1$ suit donc une loi géométrique qui est celle du premier succès. Donc Y est le nombre d'expériences **avant** le premier succès dans une suite d'expériences indépendantes dont la probabilité de succès est $1 - \frac{1}{e}$.

   On continue tant que l'on a échec :

```
from random import random
from math import exp

def simulYbis():
    u=random()
    y=0
    while u > 1-exp(-1) :
        y+=1
        u=random()
    return y
```

3. (a) Comme U a une espérance ($E(U) = \frac{1}{2}$) alors $2U - 1$ admet une espérance et comme $2U - 1$ et Y sont indépendantes et ont une espérance alors T a une espérance et

$$E(T) = E((2U - 1) \times Y) = E(2U - 1)E(Y) = (2E(U) - 1)E(Y) = 0$$

   $\boxed{\text{T admet une espérance et } E(T) = 0.}$

(b) Comme $2U-1=\pm1$ suivant que $U=0$ ou 1 alors $(2U-1)^2=1$ et donc $\boxed{T^2=Y^2}$

Y a une variance et $V(Y)=\dfrac{\mathrm{e}}{(\mathrm{e}-1)^2}$ donc Y^2 a une espérance et

$$E\left(Y^2\right)=V(Y)+E(Y)^2=\frac{\mathrm{e}}{(\mathrm{e}-1)^2}+\left(\frac{1}{\mathrm{e}-1}\right)^2=\frac{\mathrm{e}+1}{(\mathrm{e}-1)^2}$$

Et comme $T^2=Y^2$, T^2 a une espérance et donc T a une variance et

$$V(T)=E\left(T^2\right)-E(T)^2=E\left(Y^2\right)-0=\frac{\mathrm{e}+1}{(\mathrm{e}-1)^2}$$

$\boxed{T \text{ admet une variance et } V(T)=\dfrac{\mathrm{e}+1}{(\mathrm{e}-1)^2}}$

(c) Comme $Y\geqslant 0$ et que $2U-1$ vaut ±1 on a

* Si n est un entier strictement négatif :

$$\begin{aligned}P(T=n)&=P((2U-1=-1)\cap(Y=-n))\\&=P(U=0)\,P(Y=-n)\qquad\text{car les variables sont indépendantes}\\&=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{n}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\end{aligned}$$

* Pour n entier strictement positif :

$$\begin{aligned}P(T=n)&=P((2U-1=1)\cap(Y=n))\\&=P(U=1)\,P(Y=n)\qquad\text{car les variables sont indépendantes}\\&=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-n}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\end{aligned}$$

* Pour $n=0$ on a $(T=0)=(Y=0)$ et $P(T=0)=1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

$$\boxed{P(T=n)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-n}\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) & \text{si } n\in\mathbb{Z}^{+*}\\ 1-\dfrac{1}{\mathrm{e}} & \text{si } n=0\\ \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{n}\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) & \text{si } n\in\mathbb{Z}^{-*}\end{cases}}$$

4. (a) Pour $n\in\mathbb{N}$, on sait que $[Y=n]$ si, et seulement si, $n\leqslant X<n+1$ donc $X-Y\in[0;1[$.

On a donc $D(\Omega)=[0;1[$.

Ainsi l'événement $[D\leqslant t]$ est impossible pour tout $t<0$ et l'événement $[D\leqslant t]$ est certain pour tout $t\geqslant 1$.

Donc $\boxed{\text{pour tout } t<0 : F_D(t)=P(D\leqslant t)=0 \text{ et pour tout } t\geqslant 1,\ F_D(t)=1.}$

(b) Soit $t\in[0;1[$. L'événement $(D\leqslant t)$ est à déterminer suivant la valeur de Y :

$$\begin{aligned}(D\leqslant t)&=\bigcup_{n=0}^{+\infty}([Y=n]\cap[X-Y\leqslant t])\\&=\bigcup_{n=0}^{+\infty}([Y=n]\cap[X-n\leqslant t])\\&=\bigcup_{n=0}^{+\infty}([n\leqslant X<n+1]\cap[X\leqslant n+t])\\&=\bigcup_{n=0}^{+\infty}(n\leqslant X\leqslant n+t)\end{aligned}$$

Donc $\boxed{(D\leqslant t)=\bigcup_{n=0}^{+\infty}(n\leqslant X\leqslant n+t)}$

(c) Pour tout nombre réel $t\in[0;1[$ et pour tout nombre entier naturel n, comme $0\leqslant n\leqslant n+t$

$$P(n\leqslant X\leqslant n+t)=\int_n^{n+t}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_n^{n+t}=-\mathrm{e}^{-n-t}+\mathrm{e}^{-n}=\mathrm{e}^{-n}\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)$$

(d) Comme les événements de la réunion sont incompatibles,

$$\begin{aligned}F_D(t)=P(D\leqslant t)&=\sum_{n=0}^{+\infty}P(n\leqslant X\leqslant n+t)\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-n}\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)\\&=\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\mathrm{e}^{-1}\right)^n\\&=\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}}\quad\text{car } \left|\mathrm{e}^{-1}\right|<1\end{aligned}$$

$\boxed{\forall t\in[0;1[,\ F_D(t)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-1}}}$

(e) F_D est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty;0[$, sur $[0,1[$ et sur $[1;+\infty[$, grâce aux fonctions usuelles.

En 0 : $\lim_{t\to0^-} F_D(t) = \lim_{t\to0^-} 0 = 0$ et $\lim_{t\to0^+} F_D(t) = F(0) = \dfrac{1-e^{-0}}{1-e^{-1}} = 0 =$ donc F_D est continue en 0

En 1 : $\lim_{t\to1^-} F_D(t) = \lim_{t\to1^-} \dfrac{1-e^{-t}}{1-e^{-1}} = \dfrac{1-e^{-1}}{1-e^{-1}} = 1$ et $\lim_{t\to1^+} F_D(t) = F_D(1) = 1$ donc F_D est continue en 1.

Donc F_D est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ donc $\boxed{D \text{ est une variable à densité.}}$

On obtient une densité de D en dérivant F_D là où c'est possible et en complétant les points manquants par une valeur arbitraire positive ou nulle.

$$\boxed{\text{Une densité de } D \text{ est donnée par } g(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-t}}{1-e^{-1}} & \text{si } t\in[0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$