I La diffusion

1. La fonction $w(t,x) \mapsto \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+ \times [0;L]$, et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in [0;L]$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(t,x) = -\frac{n\pi}{L}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

et donc

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t,x) = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 w(t,x)$$

de plus pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(t,0) = -\frac{n\pi}{L}\sin(0) = 0$$

et

$$\frac{\partial w}{\partial x}(t,L) = -\frac{n\pi}{L}\sin\left(\frac{n\pi L}{L}\right) = 0$$

Comme cette fonction w n'est pas identiquement nulle.

$$\boxed{w \text{ est une fonction propre associée à la valeur propre } -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \text{ pour l'opérateur } \frac{\partial^2}{\partial {x^2}^2}.}$$

2. (a) Si u est de cette forme

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in [0;L] \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \alpha'(t)\cos\left(\frac{n_0\pi x}{L}\right) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\alpha(t)\cos\left(\frac{n_0\pi x}{L}\right)$$

Pour que u soit solution de (1.1), il suffit que α vérifie.

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad \alpha'(t) = -d\left(\frac{n_0\pi}{L}\right)^2\alpha(t)}$$

Donc il existe A réel tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad \alpha(t) = A\exp\left(-d\left(\frac{n_0\pi}{L}\right)^2 t\right)$$

Un calcul rapide permet de montrer que

$$\begin{array}{rccl} u: & \mathbb{R}_+ \times [0;L] & \to & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \mapsto & A\exp\left(-d\left(\frac{n_0\pi}{L}\right)^2 t\right)\right)\cos\left(\frac{n_0\pi x}{L}\right) \end{array}$$

est solution de (1.1) avec condition (1.2) La condition initiale $u(0,x) = \cos(n^{n_0\pi x}/L)$ et le fait que $\exp(0) = 1$ impose $A = 1$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Une solution de 1.1 avec condition aux bords 1.2 et condition initiale } \cos(n^{n_0\pi x}/L) \\ \text{est } (t,x) \mapsto \exp\left(-d\left(\frac{n_0\pi}{L}\right)^2 t\right)\right)\cos\left(\frac{n_0\pi x}{L}\right)\end{array}}$$

(b)
- Si $n_0 = 0$
$$\forall x \in [0; L] \qquad \lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 1$$
Les solutions sont constantes par rapport au temps et à l'espace.
- Si $n_0 > 0$, et $d = 0$, la solution est constante par rapport à la variable t
$$\forall x \in [0; L] \qquad \lim_{t\to+\infty} u(x,t) = \cos\left(\frac{n_0 \pi x}{L}\right)$$
Si il n'y a pas de diffusion, il n'y a a pas d'évolution temporelle.
- Si $n_0 > 0$ et $d > 0$, alors
$$\forall x \in [0; L] \qquad \lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0$$
Si il y a diffusion la situation initiale s'estompe avec le temps.

3. Soit u et v dans S deux solutions de (1.1) avec conditions (1.2), on pose pour $t \in \mathbb{R}$
$$F(t) = \int_0^L (u(t,x) - v(t,x))^2 \, \mathrm{d}x$$
- La fonction $(t,x) \mapsto (u(t,x) - v(t,x))^2$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times [0; L]$ car u et v le sont, car éléments de S.
- La fonction $(t,x) \mapsto \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(t,x) - v(t,x))^2$est continue sur $\mathbb{R}_+ \times [0; L]$ car u et v le sont, car elle sont éléments de S.

On peut donc appliquer le théorème donné dans l'énoncé, F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour $t \in \mathbb{R}_+$ **fixé**
$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}(t) &= \int_0^L \frac{\partial}{\partial t}(u(t,x) - v(t,x))^2 \, \mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial v}{\partial t}(t,x)\right)(u(t,x) - v(t,x)) \, \mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^L d\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x)\right)(u(t,x) - v(t,x)) \, \mathrm{d}x && \text{équation (1.} \\
&= 2d\int_0^L \left(\frac{\partial^2 (u-v)}{\partial x^2}(t,x)\right)(u(t,x) - v(t,x)) \, \mathrm{d}x && \text{linéarit} \\
&= 2d\left(\left[\frac{\partial (u-v)}{\partial x}(t,x)(u(t,x) - v(t,x)\right]_0^L - \int_0^L \left(\frac{\partial u - v}{\partial x}(t,x)\right)^2 \mathrm{d}x\right) && \text{IP} \\
&= 2d\left(\left[\frac{\partial (u-v)}{\partial x}(t,L)(u(t,L) - v(t,L) - \frac{\partial (u-v)}{\partial x}(t,L)(u(t,0) - v(t,0)\right] - \int_0^L \left(\frac{\partial (u-v)}{\partial x}(t,x)\right)^2 \mathrm{d}x\right) \\
&= 2d\left([(0-0)(u(t,L) - v(t,L) - (0,0))(u(t,0) - v(t,0)] - \int_0^L \left(\frac{\partial u - v}{\partial x}(t,x)\right)^2 \mathrm{d}x\right) && \text{conditions aux bords (1.2} \\
&= -2d\int_0^L \left(\frac{\partial (u-v)}{\partial x}(t,x)\right)^2 \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Comme $L > 0$ et $d \geqslant 0$, par croissance de l'intégrale on en déduit que $F'(t) \leqslant 0$. F est donc décroissante, positive car intégrale d'une fonction positive dont les bornes de l'intégrale sont dans le bon sens. De plus, en utilisant la condition initiale
$$F(0) = \int_0^L (u(0,x) - v(0,x))^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^L (0)^2 \, \mathrm{d}x = 0$$
On en déduit
$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad F(t) = 0$$

et l'intégrale d'une fonction positive continue ne peut être nulle que si cette fonction est identiquement nulle [1]
Ce qui démontre que

$$\forall x \in [0; L] \qquad u(t,x) - v(t,x) = 0$$

et donc le raisonnement étant valable pour tout t

$$\boxed{\text{Dans ces conditions, pour tout } t \in \mathbb{R}_+, \text{ pour tout } x \in [0; L],\ u(t,x) = v(t,x)}$$

4. Par linéarité des opérations de dérivation et en utilisant le résultat de 2), on trouve une solution

$$(t,x) \mapsto \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \exp\left(-d\left(\frac{n_0\pi}{L}\right)^2 t)\right)\cos\left(\frac{n_0\pi x}{L}\right).$$

De plus la question précédente permet de montrer que c'est la seule.
En supposons $d > 0$, c'est à dire qu'il y a diffusion, pour $x \in [0; L]$

$$\lim_{t\to+\infty} \alpha_n \exp\left(-d\left(\frac{n_0\pi}{L}\right)^2 t)\right)\cos\left(\frac{n_0\pi x}{L}\right) = \alpha_0$$

5. Quand t devient grand, les variations spatiales de la condition initiale disparaissent et il ne reste que la composante constante de la condition initiale.
De plus si $n_1 < n_2$ sont deux entiers

$$\exp\left(-d\left(\frac{n_2\pi}{L}\right)^2 t)\right) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\exp\left(-d\left(\frac{n_1\pi}{L}\right)^2 t)\right)\right)$$

ce qui justifie que la composante des conditions initiales de fréquence spatiale $f_2 = \dfrac{n_2}{2L}$ tends vers 0 beaucoup plus vite que la composante de fréquence $f_1 = \dfrac{n_1}{2L}$

II Une équation de réaction-diffusion.

1. Cas $d = 0$
Dans ce cas l'équation (2.4) devient

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = f(u(t,x)) \tag{2.4.a}$$

Il n'y a plus de dépendance en x, si on raisonne à x_0 fixé (mais quelconque) dans $[0; L]$ on peut écrire l'équation sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t,x_0) = f(u(t,x_0))$$

(a) Étude linéaire.

i. Comme f est dérivable, elle admet au voisinage de u_0, un développement limité à l'ordre 1

$$\begin{aligned} f(u_0+h) &\underset{h\to0}{=} f(u_0) + hf'(u_0) + o(h) && \text{DL1} \\ &\underset{h\to0}{=} hf'(u_0) + o(h) && \text{car } u_0 \text{ est un équilibre} \end{aligned}$$

donc l'équation (2.4.a), peut s'écrire

$$\frac{\mathrm{d}(u_0+\bar{u})(t)}{\mathrm{d}t}(t,x) = f(u_0+\bar{u}(t))$$

1. Contraposée du théorème de croissance de l'intégrale, appliqué à une fonction positive non identiquement nulle

donc par linéarité de la dérivation et dérivation d'une constante

$$\frac{\mathrm{d}\bar{u}(t)}{\mathrm{d}t}(t,x) = \bar{u}(t)f'(u_0) + o(\bar{u}(t))$$

donc tant que $\bar{u}(t)$ est assez petit, on peut négliger $o(\bar{u}(t))$ et on obtient

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\bar{u}(t)}{\mathrm{d}t}(t,x) = \bar{u}(t)f'(u_0) \qquad \bar{u}(0) = u_p(x_0)} \tag{2.4.b}$$

ii. La solution de cette équation avec condition initiale est

$$t \mapsto u_p(x_0)\exp\left(f'(x_0)t\right)$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la solution tende vers u_0 quelle que soit la petite perturbation initiale, et quelque soit $x \in [0; L]$ est que $\lim\limits_{t\to+\infty} \exp\left(f'(x_0)t\right) = 0$

La condition nécessaire et suffisante pour que u_0 soit un équilibre asymptotiquement, stable est d'avoir $f'(u_0) < 0$.

(b) Étude non linéaire.

i. On sait que f est dérivable en u_0, elle admet donc un développement limité à l'ordre 1 en ce point.

$$f(u) \underset{u\to u_0}{=} f(u_0) + (u-u_0)f'(u_0) + o(u-u_0)$$

Comme u_0 est un équilibre, $f(u_0) = 0$ et donc

$$(u-u_0)f(u) \underset{u\to u_0}{=} (u-u_0)^2 f'(u_0) + o((u-u_0)^2)$$

ce que l'on peut écrire quand u est proche de u_0

$$(u-u_0)f(u) = (u-u_0)^2 f'(u_0) + (u-u_0)^2\varepsilon(u-u_0) \qquad \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0 \qquad (**)$$

Comme $f'(u_0) < 0$, en utilisant la définition de la limite $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$on montre qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que

$$\forall h \in \left[-\eta; \eta\right] \qquad \frac{f'(u_0)}{2} \leqslant \varepsilon(h) \leqslant -\frac{f'(u_0)}{2}$$

et donc par multiplication par un réel positif

$$\forall u \in \left[u_0-\eta; u_0+\eta\right] \qquad (u-u_0)^2\varepsilon(u-u_0) \leqslant -(u-u_0)^2\frac{f'(u_0)}{2}$$

puis

$$\forall u \in \left[u_0-\eta; u_0+\eta\right] \qquad (u-u_0)^2 f'(u_0) + (u-u_0)^2\varepsilon(u-u_0) \leqslant (u-u_0)^2 f'(u_0) - (u-u_0)^2\frac{f'(u_0)}{2}$$

et donc en utilisant la formule $(**)$

Il existe $\eta >$ tel que pour tout $u \in \left[u_0-\eta; u_0+\eta\right]$ on a $(u-u_0)f(u) \leqslant (u-u_0)^2\frac{f'(u_0)}{2}$.

ii.

Remarque : L'existence d'un plus petit t^*, n'est pas complètement évident, voir l'annexe.

Cas $u(t^*,x_0)=u_0+\eta$ et que t^* est le premier instant où cette égalité à lieu. Alors

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t^*,x_0)=f(u(t^*,x_0))$$

et d'après la question précédente

$$\eta f(u(t^*,x_0))\leqslant \eta^2 f'(u_0)/2<0$$

Comme $\eta>0$, on obtient

$$f(u(t^*,x_0))<0$$

De plus $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t^*,x_0)\geqslant 0$ car par définition de t^* pour tout $t<t^*$, $u(t,x_0)<u(t^*,x_0)$ ce qui est contradictoire.

Cas $u(t^*,x_0)=u_0-\eta$

$$-\eta f(u(t^*,x_0))\leqslant(-\eta)^2 f'(u_0)/2<0$$

ce qui démontre que

$$f(u(t^*,x_0))>0$$

Or pour tout $t<t^*$, $u(t,x_0)<u(t^*,x_0)$ donc, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t^*,x_0)\leqslant 0$ ce qui est en contradiction avec l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t^*,x_0)=f(u(t^*,x_0))$$

Par l'absurde cela montre qu'il n'existe pas de temps t^*, tel que $u(t^*,x_0)$ atteigne les bords de l'intervalle. Si il existait un temps t_1 tel que $u(t_1,x_0)>0u_0+\eta$ ou $u(t_1,x_0)<0u_0-\eta$, alors la fonction $t\mapsto u(t,x_0)$ étant continue et $u(0,x_0)\in\left]u_0-\eta;\,u_0+\eta\right[$, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, on montrerait l'existence d'un temps t_1, tel que

$$u(t_1,x_0)=u_0-\eta \qquad \text{ou} \qquad u(t_1,x_0)=u_0+\eta$$

ce qui est en contradiction avec ce qui précède, et donc par l'absurde :

$$\boxed{\text{Il existe } \eta>0 \text{ tel que pour tout } t\in\mathbb{R}_+\,;\ u(t,x_0)\in\left]u_0-\eta;\,u_0+\eta\right[.}$$

iii. v est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall t\in\mathbb{R}_+ \qquad v'(t)=2(u(t,x_0)-u_0)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x_0)$$

On commence par remarquer que λ existe et est dérivable car les solutions sont définies et dérivable pour $t\in\mathbb{R}_+$ et une exponentielle est toujours non nulle

$$\forall t\in\mathbb{R} \qquad \lambda(t)=\frac{v(t)}{\exp\left(f(u_0)t\right)}=v(t)\exp\left(-f(u_0)t\right)$$

Donc pour $t\in\mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}
\lambda'(t)&=\left(v'(t)-f(u_0)v(t)\right)\exp\left(-f(u_0)t\right)\\
&=\left(2(u(t,x_0)-u_0)\frac{\partial u}{\partial t}(t,x_0)-f(u_0)v(t)\right)\exp\left(-f(u_0)t\right) && \text{dérivée de } v\\
&=\left(2(u(t,x_0)-u_0)f(u(t,x_0))-f(u_0)(u(t,x_0)-u_0)^2\right)\exp\left(-f(u_0)t\right) && \text{équation 2.4 avec } d=0
\end{aligned}$$

Or dans la question précédente nous avons démontré que $u(t,x_0)\in\left]u_0-\eta;\,u_0+\eta\right[$, on peut donc utiliser 1.b.i, ce qui démontre que $\left(2(u(t,x_0)-u_0)f(u(t,x_0))-f(u_0)(u(t,x_0)-u_0)^2\right)<0$ et par positivité de l'exponentielle, on en déduit que λ' est négative sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, donc décroissante.

Comme de plus λ est à valeurs positives cette fonction est bornée.

Comme $f'(u_0)<0$ on a $\lim_{t\to+\infty}\exp\left(f'(u_0)t\right)=0$.

Le produit d'une fonction bornée et d'une fonction de limite nulle est de limite nulle [2]

2. à savoir démontrer

$$\lim_{t\to+\infty} \lambda(t)\exp\left(f'(u_0)t\right) = 0$$

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} v(t) = 0}$$

ce qui impose $\lim_{t\to+\infty} u(t,x_0) = u_0$

$$\boxed{\text{Si } d = 0 \text{ et } f(u_0) < 0,\ u_0 \text{ est asymptotiquement stable.}}$$

2. **cas** $d > 0$

   (a) **Étude linéaire**

      i. C'est le même raisonnement que précédemment en remarquant que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}$

$$\boxed{\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}(t,x) = f'(u_0)\bar{u}(t,x) + d\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}(t,x) \qquad \bar{u}(0,\bullet) = u_p(0,\bullet) \qquad (2.6)}$$

      ii. On cherche $\bar{u}(t,x)$ sous la forme $\alpha(t)\cos\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)$, qui vérifie bien les conditions aux bords (1.2).

      L'équation 2.6 et la condition initiale $u(0,x) = \alpha_0\cos\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)$ s'écrivent[3]

$$\alpha(0) = \alpha_0 \qquad \alpha'(t) = \alpha(t)\left(f'(u_0) - d\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right)$$

      Il faut admettre l'unicité de la solution lorsque l'on étudie le problème : équation (2.6) + condition aux bords (1.2)+ condition initiales $\bar{u}(0,\bullet) = \alpha_0\cos(n\pi\bullet/L)$, la solution trouvé est alors la seule.

$$\boxed{\text{La solution est donc } \bar{u} : (t,x) \mapsto \alpha_0\exp\left(\left(f'(u_0) - d\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right)t\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

      Comme, pour tout $x \in [0;L]$, $f'(u_0) - d\left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2 < 0$

$$\forall x \in [0;L] \qquad \lim_{t\to+\infty} \bar{u}(t,x) = 0$$

$$\boxed{u_0 \text{ est asymptotiquement stable pour des petites perturbations initiales de la forme } \alpha_0\exp\left((f'(u_0)-d)t\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).}$$

   (b) **Étude non linéaire**

      i. On commence par "rappeler"

      Théorème 1.
      Soit h une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle $[a;b]$, si h atteint un maximum local *en $x_0 \in]a;b[$ alors*

$$h'(x_0) = 0 \qquad h''(x_0) \leqslant 0$$

3. cos non nul

Ce résultat n'est plus vrai si le maximum est atteint au bord de l'intervalle, on pourra s'en convaincre en étudiant $x \mapsto x^2$ sur $[-1;1]$. Par contre si h atteint son maximum local en a et que l'on rajoute l'hypothèse $h'(a) = 0$ alors on peut montrer que $h''(a) \leqslant 0$. (voir annexe)

Raisonnons par l'absurde et supposons que t^* soit fini, supposons de plus que $\sup_{x\in[0;L]} u(t^*,x) = u_0+\eta$, l'autre cas se traiterait de la manière symétrique, en commençant par adapter la remarque préliminaire à un minimum local.

La fonction $x \mapsto u(t^*,x)$ étant continue sur l'intervalle fermée borné $[0;L]$, d'après le théorème des bornes atteintes, le sup est un maximum atteint en un point que l'on note x^*. Si on fixe t^* la fonction $x \mapsto u(t^*,x)$ a pour dérivées première et seconde $x \mapsto \dfrac{\partial u}{\partial x}(t^*,x)$ et $x \mapsto \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^*,x)$. Grace à la condition aux bords (1.2), on peut appliquer la remarque préliminaire et en en déduit que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^*,x^*) \leqslant 0$$

D'après 1bi on sait que $f(u(t^*,x^*)) \leqslant (u(t^*,x^*)-u_0)f'(u_0)/2 < 0$ on en déduit que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t^*,x^*) < 0$$

Da'utre part et de la même façon qu'en II.1.b.ii, t^* étant le plus petit instant où $u(t,x^*) = u_0+\eta$

$$\forall t \in \left[0;\, t^*\right] \qquad u(t,x^*) \leqslant u(t^*,x^*)$$

ce qui implique

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t^*,x^*) \geqslant 0$$

$$\boxed{t^* \text{ n'est pas fini.}}$$

Et donc de la même façon que précédemment

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+^{,}\, \forall x \in [0;L], \quad u(t,x) \in \left]u_0-\eta;\, u_0+\eta\right[.}$$

ii. Pour $t \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(t) &= \int_0^L \frac{\partial (u(t,x)-u_0)^2}{\partial t}\,\mathrm{d}x && \text{th admis en I.2}\\
&= 2\int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)(u(t,x)-u_0)\,\mathrm{d}x\\
&= 2\int_0^L f(u(t,x))(u(t,x)-u_0)\,\mathrm{d}x + 2d\int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)(u(t,x)-u_0)\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x && \text{équation (2.4)}\\
&= 2\int_0^L f(u(t,x))(u(t,x)-u_0)\,\mathrm{d}x + 2d\left[\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)(u(t,x)-u_0)\right]_0^L - 2d\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)^2\mathrm{d}x && \text{IPP}
\end{aligned}$$

Or comme $d > 0$

$$-2d\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)^2 \leqslant 0$$

en utilisant la condition aux bords (1.2)

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)(u(t,x)-u_0)\right]_0^L = \left[\frac{\partial u}{\partial x}(t,L)(u(t,L)-u_0) - \frac{\partial u}{\partial x}(t,0)(u(t,0)-u_0)\right] = 0$$

En utilisant le fait que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, pour tout $x \in [0; L]$, $u(t,x) \in \left]u_0-\eta; u_0+\eta\right[$ et l'inégalité montrée en II.1.b.i et la croissance de l'intégrale

$$\int_0^L f(u(t,x))(u(t,x)-u_0)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{f'(u_0)}{2}\int_0^L (u(t,x)-u_0)^2\,\mathrm{d}x$$

Donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(t) \leqslant \frac{f'(u_0)}{2} V(t)$$

donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(t)\exp\left(-f'(u_0)t/2\right) \leqslant \frac{f'(u_0)}{2} V(t)\exp\left(-f'(u_0)t/2\right)$$

puis

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(t)\exp\left(-f'(u_0)t/2\right) - \frac{f'(u_0)}{2} V(t)\exp\left(-f'(u_0)t/2\right) \leqslant 0$$

La fonction W $t \mapsto V(t)\exp\left(-f'(u_0)t/2\right)$ est donc de dérivée négative donc décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad W(t) \leqslant W(0)$$

donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad 0 \leqslant V(t) \leqslant W(0)\exp\left(f'(u_0)t/2\right)$$

et comme $f'(u_0) < 0$ le terme de droite tend vers 0

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} V(t) = 0}$$

III Systèmes d'équations différentielles

1. (a) Comme U_1 et U_2 sont associés à des valeurs propres distinctes, le théorème de concaténation affirme qu'ils forment une famille libre. donc rg $((U_1 \mid U_2)) = 2$ qui est égale à sa taille, donc

$$\boxed{P \text{ est inversible}}$$

La matrice est diagonalisable, (U_1, U_2) forme une base de vecteurs propres donc :

$$M = P\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$\boxed{P^{-1}MP = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}}$$

(b) On a

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}(t) &= \frac{\mathrm{d}P^{-1}X}{\mathrm{d}t}(t) && \text{définition de } Y\\
&= P^{-1}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(t) && \text{linéarité de la dérivation , } P^{-1} \text{ matrice constante}\\
&= P^{-1}MX(t) && \text{équa-diff}\\
&= \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} P^{-1}X(t) && \text{question précédente}\\
&= \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} Y(t)
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}(t) = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} Y(t)}
$$

On note $Y(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$, le système d'équations différentielles précédent s'écrit

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) & = \lambda_1 x(t)\\
\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) & = \lambda_2 y(t)
\end{cases}
$$

les solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$, de la forme $t \mapsto Y(t) = \begin{pmatrix}A\exp(\lambda_1 t)\\ B\exp(\lambda_2 t)\end{pmatrix}$ où A et B sont des constantes réelles qui vérifient $Y(0) = \begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}$.

(c) On commence par remarquer que si $X(t) = \begin{pmatrix}a(t)\\ b(t)\end{pmatrix}$ alors

$$
\lim_{t\to+\infty} \|X(t)\| = 0 \Leftrightarrow \left(\lim_{t\to+\infty} a(t) = 0 \text{ et } \lim_{t\to+\infty} b(t) = 0\right)
$$

En effet $\|X(t)\| = \sqrt{a(t)^2 + b(t)^2}$ donc le sens $\Leftarrow$ est immédiat, dans l'autre sens il suffit de remarquer que

$$
0 \leqslant |a(t)| \leqslant \|X(t)\|
$$

et d'utiliser le théorème des gendarmes.

- 1) $\Rightarrow$ 2). Supposons que que pour tout valeur initiale $Y(0)$, $\lim_{t\to+\infty} \|Y(t)\| = 0$ cela implique en utilisant la remarque précédente, et la condition initiale $Y(0) = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ et le résultat de la question précédente

$$
\lim_{t\to+\infty} \exp(\lambda_1 t) = 0 \qquad \lim_{t\to+\infty} \exp(\lambda_2 t) = 0
$$

ce qui implique

$$\lambda_1 < 0 \qquad \lambda_2 < 0$$

- 2) $\Rightarrow$ 1), supposons que $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$, alors les solutions pour $Y(t)$ sont $t \mapsto Y(t) = \begin{pmatrix} A\exp(\lambda_1 t) \\ B\exp(\lambda_2 t) \end{pmatrix}$, quelles que soient les valeurs initiales de Y les deux composantes tendent vers 0 donc

$$\lim_{t\to+\infty} \|Y(t)\| = 0.$$

- 3) $\Leftrightarrow$ 1) Si $X(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$ a une norme qui tend vers 0 en $+\infty$ alors $a(t)$ et $b(t)$ tendent vers 0. Donc $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} X(t) = \begin{pmatrix} \alpha a(t) + \beta b(t) \\ \gamma a(t) + \delta b(t) \end{pmatrix}$ a ses deux composantes qui tendent vers 0 donc sa norme tend vers 0, donc sa norme tend vers 0.
Il suffit d'appliquer remarque à

$$X(t) = PY(t) \qquad Y(t) = P^{-1}X(t)$$

2. (a) Notons U un vecteur propre associé à λ_1 et V un vecteur non colinéaire à U, (théorème de la base incomplète), alors $(U|V)$ est une matrice de passage donc inversible. et en posant $\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$ l'image de V par l'endomorphisme canoniquement associé à M

$$M = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} P^{-1}$$

M et $\begin{pmatrix} \lambda_1 & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ sont semblables, représentent le même endomorphisme, donc partage les mêmes valeurs propres. Comme les valeurs propres d'une matrice triangulaire se lisent sur la diagonale, et que la seule valeur propre de M est λ_1 cela impose $c = \lambda_1$.
Remarque : Si $b = 0$, alors M est égale à $\lambda_1 I_2$.

$$\boxed{\text{Il existe } P \text{ inversible et } b \in \mathbb{R} \text{ tels que } P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}}$$

(b) Comme dans la question 2, on pose $Y(t) = P^{-1}X(t)$ et on note

$$Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

L'équation (3.7) est alors équivalente au système

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) &= \lambda_1 u(t) + bv(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) &= \quad \lambda_1 v(t) \end{cases}$$

Les solution pour v sont les fonctions $t \mapsto A\exp(\lambda_1 t)$, où A est une constante réelle et u doit donc vérifier

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) = \lambda_1 u(t) + A\exp(\lambda t)$$

En utilisant la méthode de la variation de la constante on trouve qu'il existe une constante B telle que u : $t \mapsto (-At+B)\exp' \lambda_2 t)$. On vérifie rapidement que ces fonctions sont bien solutions.

$$\boxed{\text{Les solutions de (3.7) sont } t \mapsto P\begin{pmatrix}(-At+B)\exp(\lambda_1 t)\\ A\exp(\lambda_1 t)\end{pmatrix} \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont des constantes réelles}}$$

Le théorème des croissances comparées affirme que la limite $\lim_{t\to+\infty} t\exp(\lambda_t)$ est déterminée par le signe de λ_1, on peut conclure de la même manière qu'en 1.c.

$$\boxed{\forall X(0) \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}), \lim \|X(t)\| = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 < 0}$$

3. (a)

$$\begin{aligned}\overline{MU} &= \overline{M}\overline{U} && \text{le conjugué est compatible avec le produit et la somme}\\ &= M\overline{U} && M \text{ est à coefficients réels}\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\overline{MU} &= \overline{(a+ib)U} && U \text{ vecteur propre associé à } a+ib\\ &= \overline{(a+ib)}\overline{U}\\ &= (a-ib)\overline{U}\end{aligned}$$

On en déduit que

$$M\overline{U} = (a-ib)\overline{U}$$

donc $\overline{U}$ est un vecteur propre non nul associé à la valeur propre $(a-ib)$, comme b est non nulle $(a-ib)$ et $a+ib$ sont deux valeurs propres distinctes, U, $\overline{U}$ forment une famille libre de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{C})$.

Soir α et β **deux réels** tels que

$$\alpha U_1 + \beta U_2 = 0$$

On constate que

$$\begin{aligned}\alpha U_1 + \beta U_2 &= \mathrm{Re}(\alpha - i\beta)(U_1 + iU_2)\\ &= \frac{1}{2}\left((\alpha - i\beta)(U_1+iU_2) + \overline{(\alpha - i\beta)(U_1+iU_2)}\right) && \text{car } z+\overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)\\ &= \frac{1}{2}\left((\alpha - i\beta)(U_1+iU_2) + (\alpha + i\beta)(U_1-iU_2)\right)\end{aligned}$$

donc

$$(\alpha - i\beta)(U_1+iU_2) + (\alpha + i\beta)(U_1-iU_2) = 0$$

or la famille $U, \overline{U}$ est libre, on en déduit

$$\begin{cases}\alpha - i\beta &= 0\\ \alpha + i\beta &= \end{cases}$$

et donc

$$\alpha = \beta = 0$$

$$\boxed{U_1 \text{ et } U_2 \text{ sont linéairement indépendant dans } \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$$

(b) $U_1 + iU_2$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre $a + ib$.

$$M(U_1 + iU_2) = (a + ib)(U_1 + iU_2)$$

donc

$$MU_1 + iMU_2 = aU_1 - bU_2 + i(bU_1 + aU_2)$$

Les matrices M, U_1 et U_2 étant à coefficients réels, on peut identifier parties réelle et imaginaires

$$MU_1 = aU_1 - bU_2 \qquad MU_2 = bU_1 + aU_2$$

ce qui peut s'écrire

$$M(U_1|U_2) = (U_1|U_2)\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

La matrice P étant inversible

$$\boxed{P^{-1}PM = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & b \end{pmatrix} P}$$

(c) On note $Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$, de la même manière qu'en III.1.b par exemple, on trouve que les fonctions r et θ vérifient le système

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} & = au(t) + bv(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} & = -bu(t) + av(t) \end{cases}$$

donc r et θ vérifient le système

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}(t)\cos(\theta(t)) - r(t)\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(t)\sin(\theta(t)) & = ar(t)\cos(\theta(t)) + br(t)\sin(\theta(t)) \\ \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}(t)\sin(\theta(t)) + r(t)\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(t)\cos(\theta(t)) & = -br(t)\cos(\theta(t)) + ar(t)\cos(\theta(t)) \end{cases}$$

En calculant $\cos\theta(t)L_1 + \sin(\theta(t))L_2$ et en utilisant la formule $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, on trouve

$$\boxed{r \text{ vérifie l'équation } \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}(t) = ar(t).}$$

Cette équation a pour unique solution $r \mapsto r(0)\exp(at)$
et donc les solutions Y vérifient

$$||Y|| \, : t \mapsto ||Y(0)|| \exp(at)$$

On a donc

$$\left(\forall Y(0) \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \qquad \lim_{t\to+\infty} \|Y(t)\| = 0\right) \Leftrightarrow a < 0$$

Comme dans III.1.c on a

$$\left(\forall X(0) \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \qquad \lim_{t\to+\infty} \|X(t)\| = 0\right) \Leftrightarrow \left(\forall Y(0) \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \qquad \lim_{t\to+\infty} \|Y(t)\| = 0\right)$$

$$\boxed{\left(\forall X(0)\in\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})\qquad \lim_{t\to+\infty}\|X(t)\|=0\right)\Leftrightarrow a<0}$$

4. (a) Soit $\lambda\in\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\lambda\in\mathrm{Sp}(M) &\Leftrightarrow M-\lambda I_2 \text{ non inversible}\\ &\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} m_1-\lambda & m_2\\ m_3 & m_4-\lambda\end{pmatrix}=0\\ &\Leftrightarrow (m_1-\lambda)(m_4-\lambda)-m_3m_2=0\\ &\Leftrightarrow \lambda^2-(m_1+m_4)\lambda+m_1m_4-m_3m_2=0\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les valeurs propres complexes de } M \text{ sont exactement les racines de } X^2-(m_1+m_4)X+\det(M).}$$

Ce polynôme a deux racines (ou une racine double) dans $\mathbb{C}$ que l'on note λ_1 et λ_2, comme il est unitaire

$$X^2-(m_1+m_4)X+\det(M)=(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$$

en développant et en identifiant les coefficients on obtient que

$$\boxed{\text{Les valeurs propres complexes de } M,\ \lambda_1 \text{ et } \lambda_2, \text{ vérifient } \lambda_1\lambda_2=\det(M) \text{ et } \lambda_1+\lambda_2=m_1+m_4.}$$

(b) On note $(*)$ la propriété

$$\forall X(0)\in\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})\qquad \lim_{t\to+\infty}\|X(t)\|=0$$

Cas deux racines simples réelles Il est aisé de vérifier que deux nombres réels x et y sont de même signe si et seulement si $xy\geqslant 0$

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\qquad \big(x,y \text{ strictement négatifs } \Leftrightarrow xy>0 \text{ et } x+y<0\big)$$

D'après la question 1 de cette partie $(*)$ est vérifiée si et seulement si les deux valeurs propres sont strictement négatives, et donc en utilisant la remarque précédente on peut conclure.

Cas une racine simple réelle Dans ce cas là le signe de λ_1 est donné par $\lambda_1+\lambda_1$ et $\lambda_1^2\geqslant 0$ et en utilisant la question 2 de cette partie on peut conclure.

Cas deux racines complexes conjuguées (a ne peut pas être nul)

$$\lambda_1=a+ib\qquad \lambda_2=a-ib$$

on a donc

$$\lambda_1+\lambda_2=2a\qquad \lambda_1\lambda_2=a^2+b^2\geqslant 0$$

le signe de a est donné par la somme des racines. On peut alors utiliser la question 3 de cette partie.

$$\boxed{\left(\forall X(0)\in\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})\qquad \lim_{t\to+\infty}\|X(t)\|=0\right)\Leftrightarrow \det(M)>0 \text{ et } m_1+m_4<0}$$

Système de réaction-diffusion

1. Soit $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$, par définition du système on ne peut pas avoir $v_0 = 0$

$$(u_0, v_0) \text{ est un équilibre} \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{u_0^2}{v_0} - u_0 & = 0 \\ u_0^2 - 2v_0 & = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2v_0}{v_0} - u_0 & = 0 \\ u_0^2 & = 2v_0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_0 & = 2 \\ u_0^2 & = 4 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Les deux équilibres de la réaction du système sont } (u_0, v_0) = (-2, 2) \text{ et } (u_0, v_0) = (2, 2).}$$

Remarque : Il me semble que que le u_0 négatif n'a pas de sens physique.

2. (a) Pour une lecture plus facile on omet les variables (t, x)

$$\frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \qquad \frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

de plus

$$\begin{aligned}
\frac{u^2}{v} - u &= \frac{(u_0 + \bar{u})^2}{v_0 + \bar{v}} - u_0 - \bar{u} \\
&= \frac{u_0 + 2u_0\bar{u} + o(\bar{u})}{v_0\left(1 + \dfrac{\bar{v}}{v_0}\right)} - u_0 - \bar{u} && \text{DL1} \\
&= \frac{u_0^2 + 2u_0\bar{u} + o(\bar{u})}{v_0}\left(1 - \frac{\bar{v}}{v_0} + o(\bar{v})\right) - u_0 - \bar{u} && \text{DL 1 de } x \mapsto \frac{1}{1+x} \\
&= \frac{u_0^2}{v_0} + 2\frac{u_0}{v_0}\bar{u} - \frac{u_0^2}{v_0^2}\bar{v} - u_0 - \bar{u} + o(\bar{u}) + o(\bar{v}) && \text{développement, on enlève les termes d'ordre 2 ou plus} \\
&= 2\frac{u_0}{v_0}\bar{u} - \frac{u_0^2}{v_0^2}\bar{v} - \bar{u} + o(\bar{u}) + o(\bar{v}) && \text{car } u_0, v_0 \text{ est un équilibre} \\
&\approx \bar{u} - \bar{v} && \text{valeurs de } u_0 \text{ et } v_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^2 - 2v &= (u_0 + \bar{u})^2 - 2v_0 - 2\bar{v} \\
&= u_0^2 + +2u_0\bar{u} - 2v_0 - 2\bar{v} + o(\bar{u}) \\
&\approx 4\bar{u} - 2\bar{v} && \text{valeurs de } u_0,\ v_0
\end{aligned}$$

On trouve donc

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix}(t, x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix}(t, x)}$$

(b) On note M_1 la matrice apparaissant dans l'équation précédente. On fixe x dans $[0;\pi]$. On peut utiliser III.4.b

$$\operatorname{tr}(M_1) = 1 + -2 < 0 \qquad \det(M_1) = 1 \times (-2) - 4 \times (-1) > 0$$

Donc quelle que soit la perturbation initiale suffisamment petite $(\bar{u}(0), \bar{v}(0))$ on a

$$\lim_{t\to+\infty} \bar{u}(t,x) = \lim_{t\to+\infty} \bar{v}(t,x) = 0$$

Ce qui démontre que

$$\boxed{\text{L'équilibre } (u_0, v_0) \text{ est asymptotiquement stable.}}$$

Remarque : Lors de la résolution des systèmes dans la partie III, sauf dans le cas une valeur propres réelle double, on peut démontrer que les normes $\|X(t\|$ sont décroissante ce qui assure que l'on ne sortira pas du domaine de validité de l'approximation linéaire que l'on à fait si les conditions initiales sont suffisamment petites.

(a) Dans le cadre d'approximations des petites variations, en reprenant les calculs précédents et en omettant les variables

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= \bar{u} - \bar{v} + d_u \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial t} &= 4\bar{u} - 2\bar{v} + d_v \dfrac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \end{cases}$$

Comme dans la question I.2 nous allons chercher deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in [0;\pi] \qquad \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix}(t,x) = \begin{pmatrix} \alpha(t)\cos(nx) \\ \beta(t)\cos(nx) \end{pmatrix}$$

Le système d'équation devient

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}(t)\cos(()\,nx) &= \alpha(t)\cos(()\,nx) - \beta(t)\cos(()\,nx) - n^2 d_u \alpha(t)\cos(()\,nx) \\ \dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}(t)\cos(()\,nx) &= 4\alpha(t)\cos(()\,nx) - 2\beta(t)\cos(()\,nx) - n^2 d_v \beta(t)\cos(()\,nx) \end{cases}$$

Il suffit que α et β vérifient

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}(t) &= \alpha(t) - \beta(t) - n^2 d_u \alpha(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}(t) &= 4\alpha(t) - 2\beta(t) - n^2 d_v \beta(t) \end{cases}$$

sous forme matriciel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} 1 - n^2 d_u & -1 \\ 4 & -(2 + n^2 d_v) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}(t)$$

On note M_2 la matrice qui apparaît dans l'équation précédente. On peut appliquer la méthode de III.4.

$$\operatorname{tr}(M) = -1 - n^2 d_u - n^2 d_v < 0$$

$$
\begin{aligned}
\det(M) &= -(1-n^2 d_u)(2+n^2 d_v)+4 \\
&= n^4 d_u d_v + n^2(2d_u - d_v)+2 \\
&= n^4 \frac{1}{100} + \frac{1}{10} n^2 + 2
\end{aligned}
$$

et cette quantité est toujours strictement positive On peut donc affirmer que, quelle que soit les valeurs initiale α_0, β_0 si elles sont suffisamment petites

$$
\lim_{t\to+\infty} \left\| \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} \right\| = 0
$$

ce qui démontre que

$$
\forall x \in [0;\pi] \qquad \lim_{t\to+\infty} u(t,x) = u_0 \qquad \lim_{t\to+\infty} v(t,x) = v_0
$$

$$
\boxed{\text{Dans cas l'équilibre est asymptotiquement stable.}}
$$

(b) On recommence, la somme des coefficients diagonaux de la matrice obtenue M_3 est toujours strictement négative, par contre

$$
\det(M_3) = n^4 \frac{12}{100} - n^2 + 2
$$

et pour $n = 2$ cette quantité est négative.

Pour répondre à la question comme elle est posée, il faudrait reprendre les calculs de la partie III et vérifier que dans le cas la condition de III.4 n'est pas respectée, alors pour **toutes conditions initiales** aussi petite que l'on veut mais non nulles $\lim t \to +\infty \|X(t)\| \neq 0$.

3. (a) On étudie la même équation avec la même méthode mais sur $\int 02\pi$, il ne faut pas oublier la forme des perturbations initiales qui doivent être des fonctions propres de l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ qui respecte les conditions au bords (1.2), elles ont étés calculées à la question I.1.2 $(t,x) \mapsto \cos(nx/2)$

La matrice a étudier est

$$
M_4 = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{n^2}{4} d_u & -1 \\ 4 & -(2 + \dfrac{n^2}{4} d_v) \end{pmatrix}
$$

$$
\operatorname{tr}(M_4) = -1 - \frac{n^2}{4} d_u - \frac{n^2}{4} d_v < 0 \qquad \det(M_4) = \frac{n^4}{400} \frac{1}{4} n^2 + 2
$$

Le calcul du déterminant associé au polynôme $\dfrac{X^2}{400}\dfrac{1}{4}X + 2$ permet de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\det(M_4) > 0$, le système est stable pour toute perturbation de cette forme.

Annexe : démonstrations de certains résultats admis

- **II1(b)ii existence de** t^* Supposons par exemple qu'il existe un $t_1 \in \mathbb{R}_+$ fini tel que

$$
u(t_1, x_0) = u_0 + \eta
$$

alors l'ensemble

$$
A = \left\{ t \in \mathbb{R}_+ / u(t_1, x_0) = u_0 + \eta \right\}
$$

est non vide et minorée par 0, il admet donc une borne inférieure que l'on note $t^* \in \mathbb{R}_+$. Il nous reste à vérifier que t^* est un minimum et qu'il appartient bien à A. On rappelle que la borne inférieure d'un ensemble est le plus petit des minorants.
Pour $n \in \mathbb{N}$, $t^* + \frac{1}{n+1} > t^*$ donc $t^* + \frac{1}{n+1}$ n'est pas un minorant de A , par définition il existe $t_n \in A$, tel que

$$t^* \leqslant t_n < t^* + \frac{1}{n+1}$$

On a construit une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A telle que

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = t^*$$

Par définition de A

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u(t_n, x_0) = u_0 + \eta$$

Comme $t \mapsto u(t_n, x_0)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$

$$\lim_{n\to+\infty} u(t_n, x_0) = u(t^*, x_0) = u_0 + \eta$$

donc

$$t^* \in A$$

et $t^* \neq 0$ car $u(0, x_0) = u_0$.

$$\boxed{\text{Si il existe } t_1 \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } u(t_1, x_0) = u_0 + \eta, \text{ il existe un plus petit } t^* \text{ tel que } u(t^*, x_0) = u_0 + \eta}$$

- **Démonstration de la remarque au début de II.2(b)i** Supposons que h soit de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a; b]$, $h'(a) = 0$ et h atteint un maximum local en a alors

$$h(a+\varepsilon) \underset{\varepsilon 0}{=} h(a) + \varepsilon h'(a) + \frac{\varepsilon^2}{1} h''(a) + o(\varepsilon^2)$$

donc

$$h(a+\varepsilon) - h(a) \underset{\varepsilon 0}{=} \frac{\varepsilon^2}{1} h''(a) + o(\varepsilon^2)$$

donc

$$h(a+\varepsilon) - h(a) \underset{\varepsilon 0}{\sim} \frac{\varepsilon^2}{1} h''(a)$$

Ces deux quantités sont du mêmes signe sur un voisinage à droite de a, et comme a est un maximum local de h, la quantité de gauche est négative sur un voisinage à droite de a.

$$\boxed{h''(a) \leqslant 0}$$