Rappels sur les suites Séries numériques.

BCPST Spé 2

Lycée Champollion Grenoble

Septembre 2023

Table des matières

I Rappels sur les suites

Attention : Ceci n'est pas un cours qui remplace celui de première année

Proposition 1 (Sommes classiques)**.**
Soit n un entier

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Si x est un réel différent de a

$$\sum_{k=0}^{n} x^k x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Démonstration :
revoir les démonstrations de première années

Théorème 1 (Limite monotone)**.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles

1. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée alors elle converge vers un réel*[1]*.*
2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et n'est pas majorée alors elle diverge vers $+\infty$.*
3. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée alors elle converge vers un réel*[2]*.*
4. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et n'est pas minorée alors elle diverge vers $-\infty$.*

Théorème 2 (Obtenir des inégalités à partir d'une limite)**.**
Si la suite (u_n) converge vers le réel ℓ et que a et b sont deux réels tels que

$$a < \ell < b$$

Les inégalités devant être strictes, alors il existe un rang n_0 tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant n_0 \Rightarrow a < u_n < b$$

Notamment si la suite (u_n) converge vers un réel strictement positif, la suite est strictement positive à partir d'un certain rang.

1. que ce théorème ne permet pas de calculer
2. que ce théorème ne permet pas de calculer

Théorème 3 (Passage à la limite)**.**
Si (u_n) *et* (v_n) *sont deux suites réelles convergent respectivement vers* ℓ_1 *et* ℓ_2 *et si à partir d'un certain rang* u_n *est plus petit que* v_n*, alors*

$$\ell_1 \leqslant \ell_2$$

Attention : Il ne faut pas remplacer les inégalités larges par des inégalités strictes dans la conclusion de ce théorème.

Théorème 4 (Théorème des encadrements)**.**
Soit (u_n)*,* (v_n) *et* (w_n) *trois suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang*

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

1. *Si de plus* $\lim\limits_{+\infty} u_n = +\infty$ *alors* $\lim\limits_{+\infty} v_n = +\infty$.
2. *Si de plus* $\lim\limits_{+\infty} w_n = -\infty$ *alors* $\lim\limits_{+\infty} v_n = -\infty$.
3. *Si de plus* $\lim\limits_{+\infty} u_n = \ell = \lim\limits_{+\infty} w_n$ *avec* ℓ *un réel alors* $\lim\limits_{+\infty} v_n = \ell$.

Théorème 5 (Suites adjacentes)**.**
Soit (u_n) *et* (v_n) *deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang*

1. (u_n) *est croissante et* (v_n) *décroissante*
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$

On dit alors que les suites sont ***adjacentes*** *et dans ce cas le théorème affirme que les deux suites convergent vers un même réel* ℓ.

Théorème 6 (Suites extraites)**.**
Soit (u_n) *une suite réelle et* $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
La suite tend vers ℓ *si et seulement si les suites extraites* (u_{2n}) *et* (u_{2n+1}) *tendent vers* ℓ.

Ce théorème est très utile pour démontrer qu'une suite n'admet pas de limite, par exemple pour montrer que $((-1)^n n)$ diverge.

Théorème 7 (Suite récurrente linéaire d'ordre 2)**.**
Soit (u_n) *une suite définie par* $u_n \in \mathbb{R}$*,* $u_1 \in \mathbb{R}$ *et pour tout entier naturel* n $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ *où* a *et* b *sont des constantes réelles. On étudie l****équation caractéristique*** *suivante*

$$r^2 = ar + b \qquad \text{(C)}$$

- *Si cette équation admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 alors il existe deux réels λ et μ tels que pour tout entier n on puisse écrire*
$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$
- *Si cette équation admet un racines réelle double r_0 alors il existe deux réels λ et μ tels que pour tout entier n on puisse écrire*
$$u_n = \lambda r_0^n + \mu \cdot n r_0^n$$
- *Si cette équation a deux racines complexes qui sont forcément conjuguées $r_{1,2} = re^{\pm i\theta}$ alors il existe deux réels λ et μ tels que pour tout entier n on puisse écrire*

$$u_n = \lambda r^n \cos(n\theta) + \mu r^n \sin(n\theta)$$

Si on connaît deux valeurs initiales on peut alors déterminer λ et μ.

À savoir-faire

Depuis l'année dernière vous devez savoir :
- formaliser "à partir d'un certain rang", "au voisinage de l'infini"...
- exprimer le terme général d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique
- exprimer, avec des indications minimales, le terme général d'une suite arithmético-géométrique $u_{n+1} = au_n + b$ en introduisant le point fixe α qui vérifie $\alpha = a\alpha + b$.
- exprimer le terme général d'une suite définie par $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ en étudiant les racines de l'équation caractéristique associé $r^2 = ar + b$.
- calculer des limites de suites en utilisant les équivalents.
- étudier, avec des indications, les suite définies sous la forme $u_0 \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

II Séries

II.1 Définitions et première propriétés

Définition 1.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

la somme des $n+1$ premiers termes.
*La **série de terme général** u_n est la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on la note $\sum u_n$*

- *S_n est la **somme partielle** de rang n*
- *On dit que la serie de terme général u_n est **convergente** si et seulement si : la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note alors*
$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$
- *On dit que la série de terme général u_n **diverge** si et seulement si : la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*
- *On dit que la série de terme général u_n diverge vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$)*

Exemple : $\sum(-1)^n, \sum n, \sum \frac{1}{n}$.

Théorème 8 (limite du terme général)**.**

Soit (u_n) une suite de réels et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la série associée.

$$\textit{Soit } n \in \mathbb{N}^* \textit{ alors } S_n - S_{n-1} = u_n \textit{ et } u_0 = S_0.$$

Et donc si une série $\sum u_n$ converge alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Attention : la réciproque est fausse, par exemple dans la suite nous verrons que $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est une série divergente.

Divergence grossière

On utilise principalement la contraposée du théorème précédent car elle permet de prouver rapidement qu'une série diverge. Pour étudier la nature d'une série on commence par regarder la limite du terme général, si ce terme ne tend pas vers 0, alors la série diverge. On dit alors que la série diverge **grossièrement** .

Exemple : la série $\sum 1$ est divergente.

Définition 2 (Nature)**.**

*Étudier la **nature** d'une série est étudier sa convergence ou sa divergence.*

Proposition 2 (Changement d'un nombre fini de termes)**.**

Soit $\sum u_n$ *une série numérique. Si on change un nombre fini de termes de la suite* (u_n) *la nature de la série reste inchangée*

Démonstration :
admis

Attention : Même si la nature d'une série reste inchangée par cette opération, dans le cas d'une série convergente, la somme de la série, est elle changée.

Définition 3 (Extensions)**.**

Si $(u_n)_{n\geqslant p}$ *est une suite définie à partir du rang p ; la série de terme* u_n *est alors définie à partir du rang p,* $\sum\limits_{n\geqslant p} u_n$.

On note si elle existe :

$$\sum_{k=p}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=p}^{n} u_k$$

II.2 Propriétés

Proposition 3 (Combinaisons linéaires)**.**

Soit $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries numériques.*
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$*, on note*

- *Si* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont deux séries convergentes alors la somme* $\sum(u_n + v_n)$ *de ces deux séries converge et*

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

- *Si* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont deux séries divergentes alors la somme* $\sum(u_n + v_n)$ *de ces deux séries peut diverger ou converger.*
- *Si* $\sum u_n$ *est une série convergente et* $\sum v_n$ *est une série divergente alors la somme* $\sum(u_n + v_n)$ *de ces deux séries est une série divergente.*
- *Si* $\alpha = 0$ *la série de terme général* αu_n *converge vers 0.*
- *Si* $\alpha \neq 0$ *et si* $\sum u_n$ *est une série convergente alors la série* $\sum \alpha u_n$ *est convergente et*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha u_k = \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

- *Si $\alpha \neq 0$ et si $\sum u_n$ est une série divergente alors la série $\sum \alpha u_n$ est divergente*

Démonstration :
Immédiat ce n'est qu'une reformulation des théorèmes sur les opérations sur la limite d'une somme.

II.3 Séries de référence

Les séries suivantes sont des séries de références, il faut les connaître ainsi que leur critère de convergence

Proposition 4 (Critère de convergence des séries géométriques)**.**
$\sum q^n$ converge si et seulement si
On a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n =$$

Démonstration :

Exercice 1.
Trouver la nature et calculer éventuellement la somme totale des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} 2^n$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} 7.\frac{1}{2^n}$

Proposition 5 (Critère de convergence des séries dérivées des séries géométriques)**.**
*La **série géométrique** $\sum nq^n$ où q est un réel et $\sum n(n-1)q^n$ convergent si et seulement si* .
On a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nq^{n-1} = \qquad\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} =$$

Exercice 2.
Déterminer la nature et éventuellement la somme de :

1. $\sum_{n\geqslant 0} n2^n$
2. $\sum_{n\geqslant 0} n^2\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.
3. $\sum_{n\geqslant 0} 7.\frac{n(n-1)}{2^n}$
4. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{2^n}$

Proposition 6 (Série exponentielle)**.**
La série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge pour *et*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} =$$

Proposition 7 (Série harmonique)**.**
La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est divergente.

Démonstration :

Proposition 8 (Série de Riemann)**.**
La série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ *est convergente. La somme*[3] *de cette série est* $\frac{\pi^2}{6}$.

Démonstration :

Remarque : La généralisation de ces résultats est explicitement hors programme mais est traitée dans un exercice de la feuille de TD.

3. résultat hors programme

II.4 Séries à termes positifs

Proposition 9 (Propriétés des séries à termes positifs)**.**
Soit $\sum u_n$ *une série à termes positifs, on note*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Alors

- *La suite des sommes partielles* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante.*
- *Si la suite des sommes partielles est majorée alors la série* $\sum u_n$ *converge.*
- *Si la suite des sommes partielles n'est pas majorée alors la série* $\sum u_n$ *diverge vers* $+\infty$*.*

Théorème 9 (Comparaison : inégalités)**.**

Soit $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries* ***à termes positifs*** *et telles que : il existe un rang* n_0 *tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant n_0 \Rightarrow 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$$

- *Si de plus la série* $\sum v_n$ *est convergente alors la série* $\sum u_n$ *est convergente.*
- *Si de plus la série* $\sum u_n$ *est*   *alors la série* $\sum u_n$ *est*   .

Démonstration :

Théorème 10 (Comparaison : relation d'équivalence)**.**

Soit $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries* ***à termes positifs*** *et telles que :*

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$$

- *La série* $\sum u_n$ *est convergente si et seulement si la série* $\sum v_n$ *est convergente.*

- *La série $\sum u_n$ est divergente si et seulement si la série $\sum v_n$ est divergente.*

Démonstration :

II.5 Convergence absolue

Définition 4 (Convergence absolue)**.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on dit que la série $\sum u_n$ ***converge absolument*** *si et seulement si la série converge.*

Théorème 11 (Lien entre les convergences)**.**
Si une série converge absolument alors elle converge et on a de plus

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Démonstration :

Attention : La réciproque de ce théorème est fausse. Par exemple la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais ne converge pas absolument (voir exercices).

Remarque : La convergence absolue permet de changer l'ordre de sommations des termes d'une série sans en changer ni la nature ni la valeur