Correction du devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 5

Problème 1

Partie A

1. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$, symétrique par rapport à 0.
   Soit $x \in \mathbb{R}$, alors
   — Si $x \in]-1; 1[$ alors $-x \in]-1; 1[$ et $f(x) = 0 = f(-x)$
   — Si $x > 1$, alors $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ et comme $-x < -1$, $f(-x) = -\dfrac{1}{(-x)^3} = \dfrac{1}{x^3} = f(x)$
   — Si $x < -1$, alors $f(x) = -\dfrac{1}{x^3}$ et comme $-x > 1$, $f(-x) = \dfrac{1}{(-x)^3} = -\dfrac{1}{x^3} = f(x)$

$$\boxed{f \text{ est une fonction paire.}}$$

2. Soit $A > 1$

$$\begin{aligned}\int_1^A f(t)\ \mathrm{d}t &= \int_1^A \frac{1}{t^3}\ \mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_1^A \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2A^2}\end{aligned}$$

   Comme $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{1}{2A^2} = 0$

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_1^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t \text{ converge et vaut } \frac{1}{2}\ .}$$

3. a) Soit $A > 1$, on pose pour $t \in [-A; -1]$ $u = -t$qui est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int_{-A}^{-1} f(t)\ \mathrm{d}t &= \int_A^1 f(-u)\ \ -\mathrm{d}u && \text{changement de variable} \\ &= \int_1^A f(-u)\ \mathrm{d}u && \text{changement du sens des bornes} \\ &= \int_1^A f(u)\ \mathrm{d}u && \text{f est paire}\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{-A}^{-1} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_1^A f(u)\ \mathrm{d}u}$$

   Or $\lim\limits_{A\to+\infty} -A = -\infty$ l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge et vaut $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_{-\infty}^{-1} f(t)\ \mathrm{d}t \text{ converge et vaut } \int_1^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t}$$

b) On a d'après ce qui précède

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{1}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 1\end{aligned}$$

De plus f est continue sur $]-\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$comme fonction usuelle et sur $]-1; 1[$comme fonction constante. f est donc continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en -1 et 1.

f est positive sur $[1; +\infty[$ et comme pour $x < -1$, $\dfrac{1}{x^3} < -1$ f est positive sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est une densité de probabilité.}}$$

4. a) Pour $x \in \mathbb{R}$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

Si $x < -1$

$$\begin{aligned}F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} -\frac{1}{t^3}\mathrm{d}t \\ &= \lim_{A \to -\infty} \int_{A}^{x} \frac{-1}{t^3}\mathrm{d}t \\ &= \lim_{A \to -\infty} \left[\frac{-1}{2t^2}\right]_A^x \\ &= \lim_{A \to -\infty} \left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2A^2}\right) \\ &= \frac{1}{2x^2}\end{aligned}$$

Si $-1 < x < 1$ alors

$$\begin{aligned}F_X(x) &= \int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{-1} -\frac{1}{t^3}\mathrm{d}t + \int_{-1}^{x} 0\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} + 0\end{aligned}$$

Si $x > 1$

$$\begin{aligned}F_X(x) &= \int_{-\infty}^{-1} -\frac{1}{t^3}\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} 0\mathrm{d}t + \int_{1}^{x} \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_1^x \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2} \\ &= 1 - \frac{1}{2x^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x\text{, on a : } F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \leqslant -1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.}$$

b) Soit $A > 1$

$$\int_1^A tf(t)\mathrm{d}t = \int_1^A \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$$
$$= \left[-\frac{1}{t}\right]_1^A$$
$$= 1 - \frac{1}{A}$$

Donc

$$\int_1^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = 1$$

Comme la fonction $t \mapsto tf(t)$ est impaire

$$\int_1^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = -1$$

et la convergence est absolue

$$\boxed{X \text{ admet une espérance qui est nulle.}}$$

c) Soit $A > 1$

$$\int_1^A t^2 f(t)\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{d}t = [\ln(t)]_1^A = \ln(A)$$

et

$$\lim_{A\to+\infty} \ln(A) = +\infty$$

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^2 f(t)\mathrm{d}t$ diverge ce qui démontre que X^2 n'admet pas de moment d'ordre 2.

$$\boxed{X \text{n'admet pas de variance.}}$$

5. a) X est à valeurs dans $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ donc $Y = |X|$ est à valeurs dans $]1; +\infty[$, donc pour $x < 1$ $F_Y(x) = 0$.
Soit $x > 1$

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leqslant x) \\ &= P(-x \leqslant X \leqslant x) \\ &= F_X(x) - F_X(-x) \\ &= 1 - \frac{1}{2x^2} - \left(\frac{1}{2x^2}\right) && \text{car } x > 1 \text{ et } -x < -1 \\ &= 1 - \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}.}$$

Cette fonction est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1; +\infty[$ et sur $]-\infty; 1[$ comme fonctions usuelles. De plus

$$\lim_{\substack{x\to1 \\ x<1}} F_Y(x) = \lim_{\substack{x\to1 \\ x<1}} 0 = 0 = F_Y(0)$$

et

$$\lim_{\substack{x\to1 \\ x>1}} F_Y(x) = \lim_{\substack{x\to1 \\ x>1}} 1 - \frac{1}{x^2} = 1 - 1 = 0$$

Donc F_Y est continue en 0 donc continue sur $\mathbb{R}$

$$\boxed{Y \text{ est une variable a densité.}}$$

b)

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \qquad f_Y(x) = F_Y'(x)$$

$$\boxed{\text{Pour } x \in \mathbb{R},\ f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.}$$

On peut choisir une valeur arbitraire en 1.

c) Soit $A \geqslant 1$

$$\begin{aligned} \int_1^A t f_Y(t)\mathrm{d}t &= \int_1^A \frac{2}{t^3}\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{1}{t}^2\right]_1^A \\ &= -\frac{1}{A} + 1 \end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} t f_Y(t)\mathrm{d}t$ converge absolument et vaut 1

$$\boxed{Y \text{ admet une espérance qui vaut } 1}$$

Partie B

1. a) D prend comme valeurs -1 et 1, donc $\dfrac{1+D}{2}$ prend comme valeur $\dfrac{-1+1}{2} = 0$ et $\dfrac{1+1}{2} = 1$. $\dfrac{D+1}{2}$ suit donc une loi de Bernouilli et

$$P\left(\frac{D+1}{2} = 1\right) = P(D=1) = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{Z \hookrightarrow \mathscr{B}(1/2)}$$

On a donc

$$E(Z) = \frac{1}{2} \qquad V(Z) = \frac{1}{4}$$

Or par linéarité

$$E(Z) = \frac{E(D)+1}{2}$$

donc

$$\boxed{E(D) = 0}$$

et

$$V(Z) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 V(D)$$

donc

$$\boxed{V(D) = 1}$$

Y et D sont indépendantes et admettent toutes les deux une espérance

$$E(T) = E(Y)E(D) = 0 \times E(Y) = 0$$

b) $\boxed{T \text{ admet une espérance qui nulle}}$

c) Soit x un réel

$$\begin{aligned} P(T \leqslant x) &= P(DY \leqslant x) \\ &= P(D=1)P_{D=1}(DY \leqslant x) + P(D=-1)P_{D=-1}(DY \leqslant x) && \text{probabilité totales} \\ &= P(D=1)P(1Y \leqslant x) + P(D=-1)P(-1\cdot Y \leqslant x) \\ &= \frac{1}{2}P(Y \leqslant x) + \frac{1}{2}P(-1\cdot Y \leqslant x) && \text{loi de } D \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x\text{, on a : } P(T \leqslant x) = \frac{1}{2}\ P(Y \leqslant x) + \frac{1}{2}\ P(Y \geqslant -x)}$$

d) On a donc pour $x \in \mathbb{R}$.

$$F_T(x) = \frac{1}{2}F_Y(x) + \frac{1}{2}\left(1 - F_Y(-x)\right)$$

Si $x \in]-1;1[$ alors $-x \in]-1;1[$ et donc

$$F_Y(x) = F_Y(-x) = 0$$

$F_T(x) = \dfrac{1}{2}$

Si $x > 1$ alors $F_Y(-x) = 0$ et $F_Y(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ donc

$$F_T(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

Si $x < -11$ alors $F_Y(x) = 0$ et $F_Y(-x) = 1 - \dfrac{1}{(-x)^2}$ donc et

$$F_T(x) = \frac{1}{2}\left(1 - 1 + \frac{1}{(-x)^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{x^2}$$

$$\boxed{\text{Pour } x \in \mathbb{R},\ F_T(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 1 \end{cases}}$$

2. a) Le cours donne

$$\boxed{\text{Pour } x \in \mathbb{R},\ F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}}$$

b) U étant à valeur dans $]0;1[$, V est bien définie. De plus

$$0 < U < 1$$

donc

$$0 < 1 - U < 1$$

do nc

$$0 < \sqrt{1-U} < 1$$

donc

$$1 < V$$

Donc si $x \in]-\infty; 1[$, $F_V(x) = 0$
Soit $x \in]1; +\infty[$

$$\begin{aligned}
P(V \leqslant x) &= P\left(\frac{1}{\sqrt{1-U}} \leqslant x\right) \\
&= P\left(\frac{1}{x} \leqslant \sqrt{1-U}\right) && \text{les quantités étant positives} \\
&= P\left(\frac{1}{x} \leqslant \sqrt{1-U}\right) && \text{les quantités étant positives} \\
&= P\left(\frac{1}{x^2} \leqslant 1-U\right) && \text{croissance sur } \mathbb{R}_+ \text{ de } x \mapsto x^2 \\
&= P\left(U \leqslant 1-\frac{1}{x^2}\right) \\
&= 1-\frac{1}{x^2} && \text{D'après } F_U \text{ et car } 1-\frac{1}{x^2} \in]0; 1[
\end{aligned}$$

$\square$

3. a)

```python
import numpy as np
import random as rd

# en remarquent que U[|0,1|] est aussi B(1/2)
def D(n):
    R=[]
    for i in range(n):
        R.append(2*rd.randint(0,1)-1)
    return R

def D(n):
    R=[]
    for i in range(n):
        if rd.random()<0.5:
            R.append(-1)
        else:
            R.append(1)
    return R
```

b)
- L est une liste de n simulations de la variable D
- Dans la boucle, pour chaque valeur de x on réalise une simulation de d'une loi uniforme $\mathscr{U}([0,1[)$ grace à `rd.random()` et on calcule $\dfrac{D}{\sqrt{1-U}} = T$ On rajoute ce résultat à la liste `R`
- À la fin de la boucle nous devons obtenir une liste constituée de n réalisations indépendantes de la variable T, la moyenne calculée doit pour n grand être proche de valeur de l'espérance calculée en partie A : 0.

Problème 2

Partie 1 : Modélisation du processus

Commande en boucle ouverte (cas u constant)

1. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t} = \frac{h_1S_1}{m_1C_1}(T_2 - T_1) \\
&= \frac{h_1S_1}{m_1C_1}(x_2 - x_1). \\
\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{h_1S_1}{m_2C_2}(x_1 - x_2) - \frac{h_2S_2}{m_2C_2}x_2 + \frac{u}{m_2C_2}.
\end{aligned}$$

2. a) On a :

$$Ax + bu = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -5x_1 + 5x_2 \\ 4x_1 - 6x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 9u \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -5x_1 + 5x_2 = 0 \\ 4x_1 - 6x_2 + 9u = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ 4x_1 - 6x_2 + 9u = 0 \end{array} \right.$$

On a bien montré que $x_1 = x_2$.

b) On a dans la question précédente montré une implication : s'il existe x et u tels que $Ax + bu = 0$ alors $x_1 = x_2$.

$Ax + bu = 0$ se traduit par $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t} = 0$ tandis que $x_1 = x_2$ équivaut à $T_1 = T_2$.

Ainsi, on a démontré que s'il existe une puissance de chauffe u et un couple de températures pour les petits pois et pour l'eau tels que ces températures n'évoluent pas, alors les petits pois et l'eau sont à la même température.

On peut résumer tout ceci sous la forme : en régime permanent, l'eau et les petits pois ont la même température (ce qui colle bien sûr avec l'intuition physique).

c) Reprenons la deuxième équation de notre système :

$$4 \times 72 - 6 \times 72 + 9u = 0 \Rightarrow u = 16$$

3. a) λ est une valeur propre de A si, et seulement si, $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible, c'est-à-dire si, et seulement si $\det(A - \lambda I_2) = 0$.

Or $\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 + 11\lambda + 10$.

Les valeurs propres sont donc -1 et -10.

b) La matrice A admet deux valeurs propres distinctes et $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ donc A est diagonalisable.

c) $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}\right)$ et $E_{-10}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

La famille $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de vecteurs propres de A.

d) Comme A est diagonalisable et $\mathscr{B}$ une base de vecteurs propres de A on a $A = PDP^{-1}$ avec la matrice D donnée et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{4}{5} & -1 \end{pmatrix}$.

On utilise la formule d'inversion pour une matrice 2×2 : $P^{-1} = \dfrac{5}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{4}{5} & -1 \end{pmatrix}$.

4. a) On a $z = \begin{pmatrix} \frac{5}{9}(x_1 + x_2) \\ \frac{4}{9}x_1 - \frac{5}{9}x_2 \end{pmatrix}$.

Donc $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9}\left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}\right) \\ \frac{4}{9}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} - \frac{5}{9}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = P^{-1}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.

b) On a donc :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= P^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = P^{-1}(Ax+bu)\\ &= DP^{-1}x + uP^{-1}b = Dz + u\beta,\end{aligned}$$

avec $\beta = P^{-1}b = \begin{pmatrix}5\\-5\end{pmatrix}$.

c) $x_1(0) = 0$ et $x_2(0) = 72$. Donc $z(0) = P^{-1}\begin{pmatrix}0\\72\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}40\\-40\end{pmatrix}$.

d) Écrivons l'équation (2) sous forme de système :

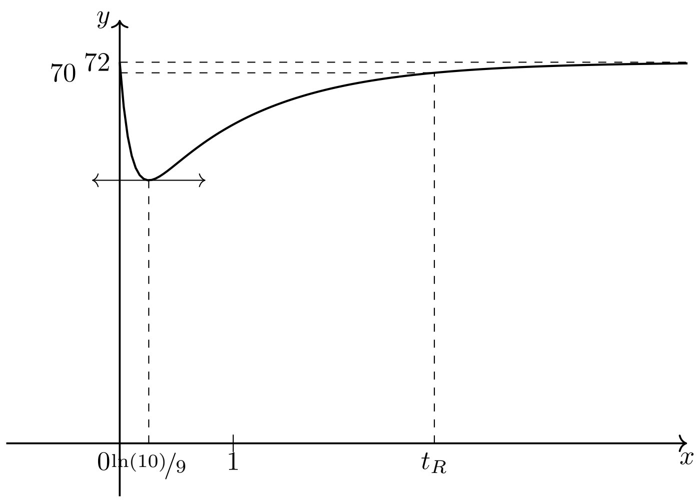
$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}t} = -z_1 + 80\\ \dfrac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}t} = -10z_2 - 80\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 80 - 40\mathrm{e}^{-t}\\ z_2 = -8 - 32\mathrm{e}^{-10t}\end{cases}.$$

e) Il suffit alors de calculer le produit Pz pour obtenir le résultat demandé :

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 = 72 - 40\mathrm{e}^{-t} - 32\mathrm{e}^{-10t}\\ x_2 = \dfrac{4}{5}x_1 - z_2 = 72 - 32\mathrm{e}^{-t} + 32\mathrm{e}^{-10t}\end{cases}$$

5. a) Pour tout $t \geqslant 0$: $x_2'(t) = 32\mathrm{e}^{-10t}(\mathrm{e}^{9t} - 10)$.

t	0		$\ln(10)/9$		$+\infty$
$x_2'(t)$		$-$	0	$+$	
$x_2(t)$	72	$\searrow$	$x_2(\ln(10)/9)$	$\nearrow$	72



b) La quantité x_2 représente l'écart de température entre l'eau et l'extérieur (20 degrés). Ainsi on constate que la température de l'eau, initialement à 92 degrés, diminue brutalement lorsque l'on plonge les petits pois dans la cuve. Cela est dû à la différence de température : les petits pois étant plus froids, un transfert thermique se met en place et la température de l'eau baisse tandis que celle des petits pois augmente. Lorsque l'écart de température entre les petits pois et l'eau devient faible, le flux de chaleur (qui est proportionnel à l'écart de température) diminue jusqu'à égaler la valeur du flux de chaleur fourni à l'eau par le chauffage. À cet instant, la température de l'eau atteint son minimum. Au delà de cet instant, la température de l'eau remonte pour finalement tendre vers une valeur limite de 92 degrés, correspondant à la valeur choisie initialement.

c) t_R représente le temps à partir duquel la température de l'eau reste définitivement supérieure ou égale à 90°C. Attention t_R n'est pas le premier temps pour lequel la température vaut (ou est supérieure ou égale à) 90 degrés, puisque l'eau commence l'expérience à 92 degrés.

d) $x_2(\ln(16)) = 72 - \dfrac{32}{16} + \dfrac{32}{16^{10}} = 70 + \dfrac{32}{16^{10}}$.

Donc $T_2(\ln(16)) = 90 + \dfrac{32}{16^{10}}$ et comme $\dfrac{32}{16^{10}}$ est très petit on a bien $T_2(\ln(16))$ qui est proche de 90.

$\ln(16)$ est une bonne approximation de t_R.

Les valeurs propres de A apparaissent dans les exponentielles. Ainsi, si les valeurs propres diminuent t_R diminue.

Commande en boucle fermée (cas u variable)

6. Cette puissance est choisie de manière à adapter la puissance de chauffe à la température de l'eau. Ainsi, si l'eau est à la température souhaitée (92 degrés), la puissance vaut 16 W, soit juste la puissance nécessaire pour maintenir la température constante ; si l'eau est sous la température souhaitée, on augmente la puissance proportionnellement à l'écart mesuré : on chauffe plus fort pour accélérer le chauffage ; enfin, si l'eau venait à dépasser les 92 degrés, on chauffe moins pour là aussi accélérer la baisse de température. Dans tous les cas, on s'attend à ce que la convergence vers la température cible soit plus rapide.
7. Pour $k = 0$ on se retrouve exactement dans le contexte de la partie 1.1. et donc $t_R \approx \ln(16)$.
8. On a :
$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax + bu(t) = Ax + b(16 + k(72 - x_2(t))).$$
De plus
$$\begin{aligned}(A - kbc^T)w &= (A - kb\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix})\left(x - \begin{pmatrix}72\\72\end{pmatrix}\right)\\ &= Ax - A\begin{pmatrix}72\\72\end{pmatrix} - kb\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}x + kb\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}72\\72\end{pmatrix}\\ &= Ax - \begin{pmatrix}0\\-144\end{pmatrix} - kbx_2 + 72kb\\ &= Ax + 16b - kx_2b + 72kb\\ &= Ax + (16 + k(72 - x_2))b = Ax + u\end{aligned}$$
On a donc bien le résultat demandé : $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = (A - kbc^T)w$.
9. a) On a $A - kbc^T = \begin{pmatrix}-5 & 5\\ 4 & -6-9k\end{pmatrix}$.

   λ est une valeur propre de $A - kbc^T$ si, et seulement si, $\det(A - kbc^T - \lambda I_2) = 0$.

   Or $\det(A - kbc^T - \lambda I_2) = \lambda^2 + (11 + 9k)\lambda + 10 + 45k$.

   Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 81k^2 + 18k + 81 = 9(9k^2 + 2k + 9) > 0$, car $k \geqslant 0$.

   Les valeurs propres de $A - kbc^T$ sont donc :
$$\lambda_1(k) = \frac{-11 - 9k - 3\sqrt{9k^2 + 2k + 9}}{2} \qquad \text{et} \qquad \lambda_2(k) = \frac{-11 - 9k + 3\sqrt{9k^2 + 2k + 9}}{2}.$$
   b) λ_1 apparait comme une somme de fonctions décroissantes ($t \mapsto -11 - 9k$ et $t \mapsto -3\sqrt{9k^2 + 2k + 9}$) donc λ_1 est une fonction décroissante.

   Pour λ_2, pas le choix, il faut faire les calculs de la dérivée :
$$\begin{aligned}\lambda_2'(k) &= \frac{1}{2}\left(\frac{3(9k+1)}{\sqrt{9k^2 + 2k + 9}} - 9\right)\\ &= \frac{3}{2}\left(\frac{(9k+1) - 3\sqrt{9k^2 + 2k + 9}}{\sqrt{9k^2 + 2k + 9}}\right)\\ &= \frac{3}{2} \times \frac{(9k+1)^2 - 9(9k^2 + 2k + 9)}{\sqrt{9k^2 + 2k + 9}(9k + 1 + \sqrt{9k^2 + 2k + 9})}\\ &= \frac{3}{2} \times \frac{-80}{\sqrt{9k^2 + 2k + 9}(9k + 1 + \sqrt{9k^2 + 2k + 9})} < 0\end{aligned}$$
   La fonction λ_2 est bien décroissante.

10. Seule la valeur propre la plus grande a un impact notable sur t_R (c'est l'idée sous-jacente à l'approximation $t_R \approx \ln(16)$ de la question 5.d) ; de plus, diminuer cette valeur propre diminue t_R. Puisque les valeurs propres de $A - kbcT$ sont des fonctions décroissantes de k, on en déduit que quand le gain k augmente, t_R diminue.

    Concernant les inconvénients potentiels, on peut citer une potentielle surchauffe inutile (avec possible dépassement de la consigne), une utilisation plus importante d'énergie ou encore une plus grande sensibilité aux perturbations.

Partie 2 : Étude informatique des commandes

Recherche du minimum d'une fonction

11. Il suffit ici de faire une fonction qui calcule et affiche le résultat de $72 - 32\mathrm{e}^{-} + 32\mathrm{e}^{-10t}$ avec la fonction `exp` du module numpy.

```
import numpy as np

def f(t):
    return 72-32*np.exp(-t)+32*np.exp(-10*t)
```

12. `Lt1` est une liste de N valeurs équiréparties dans $[0; 5]$ c'est-à-dire la liste des $\dfrac{5k}{N-1}$ pour k entier entre 0 et $N-1$.

    `Ly1` est la liste des images de chacun des éléments de `Lt1` par la fonction f.

13.
```
def minimum_f(N):
    Lt1=np.linspace(0,5,N)
    Ly1=[]
    for k in range(0,N):
        Ly1.append(f(Lt1[k]))
    m=Ly1[0]
    t=Lt1[0]
    for i in range(1,N):
        if Ly1[i]<m:
            m=Ly1[i]
            t=Lt1[i]
    return [m,t]
```

14. a) Cette différence était prévisible car le nombre de valeurs prises dans le deuxième cas est bien plus grand. Dans le premier cas, le petit nombre de valeurs prise pour t fait qu'on a pu « rater » le minimum. Avec un très grand nombres de valeurs pour t on obtient un résultat plus proche du minimum réel.

    b) C'est donc t_{m_2} qui devrait être plus proche du minimum réel.

15. Dans le cas $N_3 = 50$ on divise l'intervalle $[0; 5]$ en intervalle de longueur $\dfrac{1}{10}$ et on ne se rapproche donc jamais de $0,25$ ou $0,26$ entre lesquelles semble se trouver le minimum réel. C'est pourquoi on obtient une valeur encore moins précise que pour $N_1 = 20$.

Recherche du point d'annulation d'une fonction

16.
```
def Newt(F,G,u0,e):
    u=u0
    while abs(F(u))>e:
        u=u-F(u)/G(u)
    return u
```

17. e correspond à une majoration de l'écart entre $F(u)$ et 0, on va donc chercher à prendre un e le plus petit possible pour s'assurer d'avoir une bonne valeur approchée de la solution de l'équation $F(x) = 0$.

    On va donc choisir $e = e_3 = 10^{-8}$.

18. Avec l'algorithme de Newton nous ne sommes pas assurés de finir par trouver un u_n vérifiant exactement $F(u_n) = 0$. En mettant cette condition comme condition d'arrêt de la boucle `while` on risque donc de ne jamais sortir de la boucle `while`.

    De plus, il n'est pas pertinent de tester l'égalité à zéro lorsque l'on travaille avec des nombres flottants, à cause des erreurs machines. Il vaut mieux tester si le nombre est « très petits ».

19. Tout comme dans la question précédente, on ne sort jamais de la boucle `while` et la fonction va donc tourner indéfiniment.

20.
```
def NewtS(F,G,u0,e,nder):
    u=u0
    n=0
    while abs(F(u))>e :
        n+=1
        if n>nder:
            return False
        else:
            u=u-F(u)/G(u)
    return u
```

21. t_R est défini comme étant le plus petit réel tel que $\forall t \geqslant t_R$, $T_2(t) \geqslant 90$, c'est-à-dire $x_2(t) \geqslant 70$.
Or d'après l'étude de x_2 faite à la partie 1, on voit qu'il existe deux solutions à l'équation $x_2(t) = 70$, appelons les α et β, et d'après les variations nous avons $x_2 \geqslant 70$ sur $[0; \alpha]$ et $[\beta; +\infty[$.
Le t_R cherché est donc le β de mon explication ci-dessus, c'est-à-dire une des solutions de l'équation $x_2(t) - 70 = 0$.
On va donc appliquer la méthode de Newton à la fonction $x_2 - 70 = f - 70$ mais il faudra faire attention à la valeur de u_0 choisie : il faudra prendre un $u_0 \geqslant \dfrac{\ln(10)}{9}$ sinon la méthode de Newton ne nous renverra pas la bonne solution de l'équation $f(t) - 70 = 0$! !

22. On a bien appliqué ici la méthode de Newton à la fonction $f - 70$ comme préconisé dans la question précédente. On pourra remarquer que `G1` est bien la dérivée de `F1` ?
On retrouve ici les deux solutions de l'équation $x_2(t) = 70$ car les deux valeurs de u_0 choisies sont situées l'une sur la partie où x_2 est croissante et l'autre sur la partie où x_2 est croissante.
Le t_R cherché est donc proche de $2,77$ qui est bien proche de $\ln(16)$!