DL mathématiques n°16
Réponses

Pour tout $n \geqslant 1$. On considère la matrice $K_n \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $(K_n)_{i,i+1} = i$, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $(K_n)_{j+1,j} = -n-1+j$ et dont tous les autres coefficients sont nuls. On a donc :

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de K_1. Cette matrice est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?

RÉPONSE:

En utilisant un déterminant

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } K_1 \text{ sont } i \text{ et } -i}$$

Puis

$$\boxed{E_i = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\right) \text{ et } E_{-i} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\right)}$$

Cette matrice réelle n'admet aucune valeur propre réelle, elle n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$, elle admet deux valeurs propres complexes distinctes, elle est donc diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

❀

2. Écrire une fonction K en Python qui prend en entrée un entier n et qui renvoie la matrice K_n.

RÉPONSE:

```
import numpy.linalg as la
import numpy as np
def K(n):
        M=np.zeros([n+1,n+1])
        for i in range(0,n): # attention décalage
                M[i][i+1]=i+1

        for j in range(0,n):
                M[j+1][j]=-n-1+j+1
        return M
```

Remarque : Le module `numpy` autorise deux syntaxes pour accéder à l'élément en position i, j

- `M[i][j]` c'est aussi la syntaxe utilisée lors qu'une matrice est représentée par une liste de liste.
- `M[i,j]` syntaxe proche de celle utilisée en mathématiques

❀

3. Utiliser la fonction précédente et la fonction `eigvals` du module `numpy.linalg` pour déterminer les valeurs propres de K_n pour $n \in [\![1, 10]\!]$. Que peut-on conjecturer?

RÉPONSE:

```
for n in range(1,11):
        print(la.eigvals(K(n)))
```

Qui affiche

```
[0.+1.j 0.-1.j]
[-4.44089210e-16+2.j -4.44089210e-16-2.j  2.35304824e-16+0.j]
[2.79049656e-104+3.j 2.79049656e-104-3.j 1.11022302e-016+1.j
1.11022302e-016-1.j]
[ 2.16840434e-19+4.j  2.16840434e-19-4.j -5.20527246e-28+0.j
0.00000000e+00+2.j  0.00000000e+00-2.j]
[-1.11022302e-16+5.j -1.11022302e-16-5.j  2.22044605e-16+3.j
2.22044605e-16-3.j -6.74700668e-80+1.j -6.74700668e-80-1.j]
[-4.85722573e-16+6.j -4.85722573e-16-6.j  0.00000000e+00+4.j
0.00000000e+00-4.j  4.15387251e-21+0.j  0.00000000e+00+2.j
0.00000000e+00-2.j]
[ 0.00000000e+00+7.j  0.00000000e+00-7.j -2.22044605e-16+5.j
-2.22044605e-16-5.j  0.00000000e+00+1.j  0.00000000e+00-1.j
-2.22044605e-16+3.j -2.22044605e-16-3.j]
[ 1.66533454e-16+8.j  1.66533454e-16-8.j  7.77156117e-16+6.j
7.77156117e-16-6.j  0.00000000e+00+4.j  0.00000000e+00-4.j
5.02046287e-20+0.j -1.11022302e-16+2.j -1.11022302e-16-2.j]
[-7.77156117e-16+9.j -7.77156117e-16-9.j  4.44089210e-16+7.j
4.44089210e-16-7.j -8.88178420e-16+5.j -8.88178420e-16-5.j
1.11022302e-16+1.j  1.11022302e-16-1.j  2.22044605e-16+3.j
2.22044605e-16-3.j]
[ 5.55111512e-16+10.j  5.55111512e-16-10.j  0.00000000e+00 +8.j
0.00000000e+00 -8.j  4.44089210e-16 +6.j  4.44089210e-16 -6.j
-3.33066907e-16 +4.j -3.33066907e-16 -4.j  9.81704710e-20 +0.j
0.00000000e+00 +2.j  0.00000000e+00 -2.j]
```

Pour bien interpréter le résultat il faut

- Se rappeler que la notation j des physiciens est utilisée pour un nombre $\mathbf{i}$ vérifiant $\mathbf{i}^2 = -1$.
- Les calculs donnent des valeurs approchées, il faut bien faire attention au puissances de 10 très négatives.

Il semblerait que

(a) $\mathrm{Sp}(K_1) = \{-\mathbf{i}\ ,\ \mathbf{i}\}$

(b) $\mathrm{Sp}(K_2) = \{-2\mathbf{i}\ , 0,\ 2\mathbf{i}\}$

(c) $\mathrm{Sp}(K_3) = \{-3\mathbf{i}\ , -\mathbf{i}, \mathbf{i},\ 3\mathbf{i}\}$

(d) $\mathrm{Sp}(K_n) = \{-n\mathbf{i}, \cdots - (n-2)\mathbf{i}, \ldots, n\mathbf{i}\}$

❀

4. On se propose de montrer la conjecture faite dans la question précédente. On note $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ et V_n le $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel engendré par la famille de fonctions $\mathscr{B}_n = \left(f_k\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \cos^{n-k}(x)\sin^k(x)$$

On considère l'application φ_n définie pour tout $f \in V_n$ par $\varphi_n(f) = f'$

(a) Soient $(\lambda_0,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ et $x \in \left]-\pi/2;\pi/2\right[$. Montrer que

$$\lambda_0 f_0(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = 0 \quad \text{si, et seulement si,} \quad \lambda_0 + \lambda_1 \tan(x) + \cdots + \lambda_n \tan(x)^n = 0$$

RÉPONSE:

Il suffit de multiplier ou de diviser par $\cos^n(x)$ qui n'est jamais nul sur l'intervalle $\left]-\pi/2;\pi/2\right[$

❀

(b) En déduire que la famille $\mathscr{B}_n$ est une base de V_n et la dimension de V_n.

RÉPONSE:

Par définition la famille $\mathscr{B}_n$ est une famille génératrice e V_n.
Soit $\lambda_0,\dots,\lambda_n$ des complexes tels que

$$\forall x \in \left]-\pi/2;\pi/2\right[\qquad \lambda_0 f_0(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = 0$$

D'après la question précédente cela implique

$$\forall x \in \left]-\pi/2;\pi/2\right[\qquad \lambda_0 + \lambda_1 \tan(x) + \cdots + \lambda_n \tan(x)^n = 0$$

Comme tan induit une bijection de $\left]-\pi/2;\pi/2\right[$ dans $\mathbb{R}$ on obtient

$$\forall X \in \mathbb{R} \qquad \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_n X^n = 0$$

La fonction polynomiale est nulle donc tous coefficients sont nuls

$$\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$$

On a donc montré que la famille $\mathscr{B}_n$ est libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

$$\boxed{\text{La famille } \mathscr{B}_n \text{ est une base de } V_n \text{ et la dimension de } V_n \text{ est } n+1.}$$

Remarque : on peut aussi utiliser un argument qui utilise le nombre maximum de racine pour un polynôme de degré fixé.

❀

(c) Monter que φ_n est un endomorphisme de V_n et déterminer sa matrice dans la base $\mathscr{B}_n$.

RÉPONSE:

D'après le cours de terminale φ est une application linéaire
On calcule aussi que
$$\forall k \in [\![1, n-1]\!] \qquad \varphi(f_k) = -(n-k)f_{k+1} + kf_{k-1}$$
$$\varphi(f_0) = -f_1 \qquad \varphi(f_n) = nf_{n-1}$$

Remarque : on peut écrire
$$\forall k \in [\![0, n]\!] \qquad \varphi(f_k) = -(n-k)f_{k+1} + kf_{k-1}$$
en considérant que $0f_{-1} = 0$ est la fonction nulle
On constate que l'image de tous les vecteurs de $\mathscr{B}_n$ sont dans V_n ce qui implique, pour une application linéaire que l'image de tous vecteur de V_n est dans V_n

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } V_n}$$

Les calculs précédents permettent d'affirmer que

$$\boxed{\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\varphi) = K_n}$$

❀

(d) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ on note g_k la fonction définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = \exp(i(n-2k)x)$$
Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_k(x) = (\cos(x) + i\sin(x))^{n-k}(\cos(x) - i\sin(x))^k$.

RÉPONSE:

Soit x réel

$$\begin{aligned}
g_k(x) &= \exp(i(n-2k)x) \\
&= \exp(i(n-k)x)\exp(-ikx) \\
&= \big(\exp(ix)\big)^{n-k}\big(\exp(-x)\big)^k \\
&= \big(\cos x + \mathbf{i}\,\sin x\big)^{n-k}\big(\cos(-x) + \mathbf{i}\,\sin(-x)\big)^k && \text{Moivre} \\
&= \big(\cos x + \mathbf{i}\,\sin x\big)^{n-k}\big(\cos(x) - \mathbf{i}\,\sin(x)\big)^k && \text{parités de sin et cos}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \qquad g_k(x) = (\cos(x) + i\sin(x))^{n-k}(\cos(x) - i\sin(x))^k.}$$

❀

(e) En déduire que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, g_k appartient à V_n. *Indication :* On pourra utiliser sans le justifier que $\left(\sum_{j=0}^{n-k} a_j\right)\left(\sum_{l=0}^{k} b_l\right) = \sum_{j=0}^{n-k}\sum_{l=0}^{k} a_j b_l$.

RÉPONSE:

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ fixé (les deux autres cas ressemblent à celui ci) pour x réel fixé

$$\begin{aligned} g_k(x) &= (\cos(x) + i\sin(x))^{n-k}(\cos(x) - i\sin(x))^k \\ &= \left[\sum_{\ell=0}^{n-k} \lambda_\ell \cos^{n-k-\ell}(x)\sin^\ell\right]\left[\sum_{h=0}^{k} \mu_\ell \cos^{k-h}(x)\sin^h\right] \qquad \text{coefficients issus du Binôme de Newton} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-k}\sum_{h=0}^{k} \lambda_\ell \mu_h \cos^{n-(\ell+h)}(x)\sin^{\ell+h} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-k}\sum_{h=0}^{k} \lambda_\ell \mu_h f_{n-(h+\ell)} \end{aligned}$$

On a donc démontré que g_k est une combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathscr{B}_n$.

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in [\![0, n]\!],\ g_k \text{ appartient à } V_n.}$$

Remarque : Il n'est pas nécessaires d'exprimer les coefficients dans les sommes précédentes, seul est pertinent le fait qu'ils soient complexes

❀

(f) En déduire les valeurs propres de φ_n puis celle de K_n.

RÉPONSE:

Soit k fixé

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g_k(x) = \cos((n-2k)x) + \mathbf{i}\,\sin((n-2k)x)$$

On calcule [1]

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g_k'(x) = (n-2k)\big(-\sin((n-2k)x) + \mathbf{i}\,\cos((n-2k)x)\big)$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g_k'(x) = \mathbf{i}\,(n-2k)\big(\mathbf{i}\,\sin((n-2k)x) + \cos((n-2k)x)\big)$$

et finalement

$$\varphi(g_k) = (n-2k)g_k$$

g_k n'étant pas la fonction nulle

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!],\ g_k \text{ est un vecteur propre de } \varphi \text{ associé à la valeur propre } (n-2k)}$$

On à trouvé $n+1$ valeurs propres (complexes) distinctes deux à deux et φ est endomorphisme d'un espace de dimension $n+1$, il ne peut pas y en avoir d'autres.

$$\boxed{\mathrm{sp}(\varphi) = \mathrm{sp}(K_n) = \left\{(n-2k)\mathbf{i} \,/\, k \in [\![0, n]\!]\right\}}$$

❀

1. On peut aussi prolonger à l'exponentielle complexe les règles de calculs connues

(g) La matrice K_n est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?

RÉPONSE:

Oui caar $K_n \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ et elle admet $n+1$ valeurs propres distinctes deux à deux

❀

(h) Déterminer pour quelle valeur de n, la matrice K_n est inversible.

RÉPONSE:

Une matrice est inversible si et seulement si 0 n'est pas une de ses valeurs propres.

$$\boxed{K_n \text{ est inversible si et seulement si } n \text{ est impaire}}$$

❀

(i) Lorsque K_n n'est pas inversible, déterminer une base du noyau.

RÉPONSE:

Si n est pair $n = 2\ell$ alors la matrice n'est pas inversible et une base du noyau est formée par un vecteur propre de K_n associé à la valeur propre 0, c'est la matrice des coordonnées de g_ℓ.
Or $g_\ell(x) = \exp(i \times 0 \times x) = 1$

$$\begin{aligned} g_\ell(x) &= \left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right)^{n/2} \\ &= \sum_{k=0}^{n/2} \binom{n/2}{k} \cos^{2k}(x) \sin^{n-2k}(x) \end{aligned}$$

Une base de K_n est la matrice colonne dont mes coefficients d'indice pair sont nuls et le coefficient d'indice $2k$ vaut $\binom{n/2}{k}$.

❀