DM facultatif type ENS

Réponses

Préliminaires

1. On reconnaît une suite arithmético-géométrique. L'équation caractéristique associée est
$$\ell = r\ell + s \qquad (C)$$
Comme $r \neq 1$, cette équation a pour pour unique solution
$$\ell = \frac{s}{1-r}$$
La suite définie par $(u_n - \ell)$ est une suite géométrique de raison r et de premier terme $u_1 - \ell$
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n - \ell = (u_1 - \ell) r^{n-1}$$
donc
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = u_1 r^{n-1} - \frac{s}{1-r} r^{n-1} + \frac{s}{1-r}$$
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = u_1 r^{n-1} + \frac{s(1-r^{n-1})}{1-r}}$$

2.

3.
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} \mathbb{E}[h(X) \mid Y=k]\mathbb{P}(Y=k) &= \sum_{k=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} h(j)\mathbb{P}(X=j \mid Y=k)\mathbb{P}(Y=k) && \text{définition précédente}\\
&= \sum_{j=0}^{N} h(j) \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(X=j \mid Y=k)\mathbb{P}(Y=k) && \text{inversion } \Sigma\\
&= \sum_{j=0}^{N} h(j)\mathbb{P}(X=j)\mathbb{P}(Y=k) && \text{proba totales SCE } (Y=k)_{k\in[\![0,N]\!]}\\
&= \mathbb{E}[h(X)] && \text{théorème de transfert}
\end{aligned}$$
$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} \mathbb{E}[h(X) \mid Y=k]\mathbb{P}(Y=k)\mathbb{E}[h(X)]}$$
Ce théorème, dit de l'espérance totale, peut s'écrire
$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[h(X) \mid Y]\right] = \mathbb{E}[h(X)]$$

I Étude en espérance

4. $X_1 = N$ au début de l'année tous les livres sont disponibles. $X_{n+1} = N - Z_n$ en semaine $n+1$ les livres disponibles sont ceux qui n'ont pas été empruntés la semaine d'avant. Ceux qui ont été empruntés les semaines qui précèdent on été rendus.
5. Si on suppose que $[X_n = k]$ est réalisé on, il y a k livres disponibles et Z_n compte alors le nombre de succès "un livre est emprunté" lors de la répétition de k expériences de Bernoulli identique indépendante de paramètre p.
$$\boxed{\mathbb{P}(Z_n = j \mid X_n = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } j > k \\ \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j} & \text{si } 0 \leqslant j \leqslant k \end{cases}}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{n+1}|X_n = k] &= \mathbb{E}[N - Z_n|X_n] && \text{question précédente}\\
&= \sum_{j=0}^{N} (N-j)\mathbb{P}(Z_n = j \mid X_n = k) && \text{def avec } h : j \mapsto N-j\\
&= \sum_{j=0}^{k} (N-j)\binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j}\\
&= N\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j} - \sum_{j=0}^{k} j\binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j}\\
&= N(p+(1-p))^k - kp
\end{aligned}$$

Pour le dernier calcul on reconnaît dans la somme l'expression de l'espérance d'une variable aléatoire suivant $\mathscr{B}(k,p)$

$$\boxed{\mathbb{E}[X_{n+1}|X_n = k] = N - kp}$$

6. D'après la question 3

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{n+1}] &= \sum_{k=0}^{N} \mathbb{E}[X_{n+1}|X_n = k]\mathbb{P}(X_n = k)\\
&= \sum_{k=0}^{N} (N - kp)\mathbb{P}(X_n = k)\\
&= \mathbb{E}[N - pX_n] && \text{théorème de transfert}\\
&= N - p\mathbb{E}[X_n] && \text{linéarité}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}[X_{n+1}] = N - p\mathbb{E}[X_n]}$$

7. En utilisant les préliminaires et $\mathbb{E}[X_1] = N$

$$\boxed{\text{Pour } k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}[X_n] = N\frac{1-(-p)^{n-1}}{1+p} + N(-p)^{n-1}}$$

Comme $0 < p < 1$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_n] = \frac{N}{1+p}}$$

II Le cas $N = 2$

8. Première colonne, si on suppose $[X_n = 0]$ réalisé, alors tous les exemplaires ont été empruntés en semaine $n-1$ et vont donc être disponibles en début de semaine $n+1$

Deuxième colonne, si on suppose $[X_n = 1]$ réalisé, alors l' ouvrage emprunté la semaine d'avant sera disponible et il y a une chance $(1-p)$ que celui disponible n'ait pas été emprunté

Deuxième colonne, si on suppose $[X_n = 2]$ réalisé, alors 2 ouvrages sont disponibles, aucun ne rentre On trouve

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p^2\\ 0 & p & 2p(1-p)\\ 1 & 1-p & (1-p)^2 \end{pmatrix}}$$

9. En résolvant les systèmes (signalez lorsque vous utilisez $p =\neq 0$ et $1-p\neq 0$)

$$\boxed{u_1 = \begin{pmatrix} p^2 \\ 2p \\ 1 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} -p \\ -(1-p) \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

10. Comme u_1, u_2 et u_3 sont non nuls, 1, $-p$ et p^2 sont bien des valeurs propres de A.
Comme $p \in]0;1[$, 1, $-p$ et p^2 sont distincts deux à deux. Ce sont trois valeurs propres et il ne peut pas y en avoir d'autre pour une matrice d'ordre 3

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1, -p, p^2\}}$$

Les trois (u_1, u_2, u_3) sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, ils forment donc une famille libre. Comme Dim $\mathbb{R}^3 = 3$

$$\boxed{(u_1, u_2, u_3) \text{ forme une base de } \mathbb{R}^3}$$

Remarque : On identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et les matrices colonnes à trois composantes réelles, ce qui est explicitement proscrit dans le programme BCPST actuel.

11. La relation s'obtient en utilisant le théorème des probabilités totales avec le SCE $([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2])$ et

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

12. Pour s'en sortir facilement il faut résoudre, partiellement, un système et être astucieux.

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = w_1 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1p^2 - a_2p + a_3 & = 0 \\ 2pa_1 - (1-p)a_2 - 2a_3 & = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 & = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1p^2 - a_2p + a_3 & = 0 & \\ 2p(1+p)a_1 - (1+p)a_2 & = 0 & L_2 + 2L_1 \\ a_1(1-p^2) + (1+p)a_2 & = 1 & L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1p^2 - a_2p + a_3 & = 0 & \\ 2p(1+p)a_1 - (1+p)a_2 & = 0 & \\ a_1(1-p^2) + 2p(1+p) & = 1 & L_3 + L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1p^2 - a_2p + a_3 & = 0 & \\ 2p(1+p)a_1 - (1+p)a_2 & = 0 & \\ a_1(1+p)^2 & = 1 & L_3 + L_2 \end{cases}$$

Pas besoin d'aller plus loin, on sait que les réels a_1, a_2 et a_3 existent car u_1, u_2, u_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$

$$\boxed{a_1 = \frac{1}{(1+p)^2}}$$

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$w_{n+1} = a_{1,n+1}u_1 + a_{2,n+1}u_2 + a_{3,n+1}u_3$$

Mais d'un autre coté

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= A(a_{1,n}u_1 + a_{2,n}u_2 + a_{3,n}u_3) \\ &= a_{1,n}Au_1 + a_{2,n}Au_2 + a_{3,n}Au_3 \\ &= a_{1,n}u_1 - pa_{2,n}u_2 + p^2a_{3,n}u_3 && \text{def de } u_1, u_2, u_3 \end{aligned}$$

Comme (u_1, u_2, u_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$

$$a_{1,n} = a_{1,n+1} \qquad a_{2,n+1} = -pa_{2,n}, \qquad a_{3,n+1} = p^2 a_{3,n}$$

$$\boxed{a_1^* = \frac{1}{(1+p)^2},\ a_2^* = a_3^* = 0.}$$

14. Évident par le calcul, on peut aussi écrire

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad w_{n+1} = Aw_n$$

et en étendant les théorème vu sur les limites et en passant à la limite des deux cotés de l'égalité, on obtient

$$\boxed{w^* = Aw^*.}$$

15. $w^* = \begin{pmatrix} \dfrac{p^2}{(1+p)^2} \\ \dfrac{2p}{(1+p)^2} \\ \dfrac{1}{(1+p)^2} \end{pmatrix}$

On constate que les trois termes sont positifs et que leur somme vaut 1

De plus

$$w^* = \begin{pmatrix} \left(1 - \dfrac{1}{1+p}\right)^2 \\ 2\dfrac{1}{1+p}\left(1 - \dfrac{1}{1+p}\right) \\ \left(\dfrac{1}{1+p}\right)^2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{On reconnaît la loi } \mathscr{B}\left(2, \frac{1}{1+p}\right).}$$

III Cas général

16. On rappelle que X_1 est la variable aléatoire certaine égale à N

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \mathbb{E}[s_1^X] \\ &= \sum_{k=0}^{N} s^k \mathbb{P}(X_1 = k) \\ &= s^N && \text{tous les autres termes sont nuls} \end{aligned}$$

$$\boxed{G_1(s) = s^N.}$$

17. On remarque

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad 0^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$G_n(0) = \sum_{k=0}^{N} 0^k \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X_n = 0)$$

et G_n est une fonction polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

$$\forall s \in \mathbb{R} \qquad G_n'(s) = \sum_{k=0}^{N-1} (k+1) s^k \mathbb{P}(X_n = k+1)$$

et donc

$$\boxed{G_n(0) = \mathbb{P}(X_n = 0),\, G_n'(0) = \mathbb{P}(X_n = 1)\ .}$$

18. On démontre par récurrence que pour $m \in [\![0, N]\!]$

$$\forall s \in \mathbb{R} \qquad G_n^{(m)}(s) = \sum_{k=0}^{N-m} (k+m)(k+m-1)\cdots(k+1) s^k \mathbb{P}(X_n = k+m)$$

et donc

$$\boxed{G_n^{(m)}(0) = m!\mathbb{P}(X_n = m)\ .}$$

19. Soit $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[s^{Z_n} \mid X_n = k\right] &= \sum_{j=0}^{N} s^j \mathbb{P}(Z_n = j \mid X_n = k) \\
&= \sum_{j=0}^{k} s^j \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j} \mathbb{P}(Z_n = j \mid X_n = k) && \text{question 5} \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (ps)^j (1-p)^{k-j} \mathbb{P}(Z_n = j \mid X_n = k) \\
&= (ps + 1 - p)^k && \text{formule binôme}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}\left[s^{Z_n} \mid X_n = k\right] = (1 - p + ps)^k\ .}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[s^{X_{n+1}} \mid X_n = k\right] &= \mathbb{E}\left[s^{N - Z_n} \mid X_n = k\right] && \text{question 4} \\
&= \sum_{j=0}^{N} s^{N-j} \mathbb{P}(Z_n = j \mid X_n = k) \\
&= s^N \sum_{j=0}^{k} s^{-j} \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j} \mathbb{P}(Z_n = j \mid X_n = k) && \text{question 5} \\
&= s^N \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (ps^{-1})^j (1-p)^{k-j} \mathbb{P}(Z_n = j \mid X_n = k) \\
&= s^N (ps^{-1} + 1 - p)^k && \text{formule binôme}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}\left[s^{X_{n+1}} \mid X_n = k\right] = s^N\left(1-p+\frac{p}{s}\right)^k.}$$

On peut démontrer ce résultat plus rapidement en admettant que l'espérance conditionnelle vérifie des propriétés analogues de celles de l'espérance.

20. Soit $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(s) &= \mathbb{E}\left[s^{X_{n+1}}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{N} \mathbb{E}\left[s^{X_{n+1}} \mid X_n = k\right] \mathbb{P}(X_n = k) && \text{question 3} \\
&= \sum_{k=0}^{N} s^N\left(1-p+\frac{p}{s}\right)^k && \text{question précédente} \\
&= s^N \sum_{k=0}^{N}\left(1-p+\frac{p}{s}\right)^k \mathbb{P}(X_n = k) \\
&= s^N \mathbb{E}\left[\left(1-p+\frac{p}{s}\right)^{X_n}\right] && \text{th transfert} \\
&= s^N G_n\left(1-p+\frac{p}{s}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } s \in \mathbb{R},\ G_{n+1}(s) = s^N G_n\left(1-p+\frac{p}{s}\right).}$$

21. **Initialisation** On pose $q_1 = 1$ et on utilise la question 16.
Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$ supposons qu'il existe q_n tel que

$$\forall s \in \mathbb{R} \qquad G_n(s) = (1-q_n+q_n s)^N$$

Pour $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(s) &= s^N G_n\left(1-p+\frac{p}{s}\right) && \text{question précédente} \\
&= s^N\left(1-q_n+q_n\left(1-p+\frac{p}{s}\right)\right)^N && \text{HR} \\
&= \left(s-q_n s+q_n s-q_n p s+q_n p\right)^N \\
&= \left(s(1-q_n p)+q_n p\right)^N \\
&= \left(s(1-q_n p)+1-(1-q_n p)\right)^N \\
&= \left(s q_{n+1}+1-q_{n+1}\right)^N && \text{en posant } q_{n+1} = 1-p q_n
\end{aligned}$$

(q_n) est une suite arithmético-géométrique

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*,\ q_n = (-p)^{n-1} + \frac{1-(-p)^{n-1}}{1+p}.}$$

22. Pour $m \in [\![0, N]\!]$

$$G_n^{(m)}(s) = q_n^m N(N-1)\times\cdots\times(N-m+1)(1-q_n+q_n s)^{N-m}$$

et en utilisant la question 17

$$\mathbb{P}(X_n = m) = \frac{1}{m!} q_n^m N(N-1)\times\cdots\times(N-m+1)(1-q_n)^{N-m} = \binom{N}{m} q_n^m (1-q_n)^{N-m}$$

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*,\ X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(N, q_n).}$$

23. Comme $p \in]0;1[$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} q_n = \frac{1}{1+p}.}$$

24. Tou est bien cohérent, on pourrait montrer que X_n converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{B}(n, 1/(1+p))$