Lycée Champollion, Grenoble — **2023-2024**
T.D. de Mathématiques — BCPST Spé 2

SUITES ET SÉRIES

Suites classiques

Exercice 1.
Donner le terme général des suites suivantes, puis donner une fonction python `suite(n)` qui renvoie la valeur du nième terme de la suite.

1. $u_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = 2u_n$.
2. $u_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n + 4$.
3. $u_0 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = 2u_n - 1$.
4. $u_0 = 0, u_1 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$.
5. $u_0 = 1, u_1 = -1$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.
6. $u_0 = 1, u_1 = 2$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$

Exercice 2 (Sommes classiques)**.**

1. Soit a un réel, on défini la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout entier n $u_{n+1} = au_n$. Soit p et n deux entiers tels que $p \leqslant n$, calculer
$$\sum_{k=0}^{n} u_k \qquad \text{puis } \sum_{k=p}^{n} u_k$$
Puis écrire des fonctions python permettant de calculer ces sommes
2. Soit b un réel , on défini la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout entier n $u_{n+1} = u_n + b$. Soit p et n deux entiers tels que $p \leqslant n$, calculer
$$\sum_{k=p}^{n} u_k$$

Exercice 3 (Sommes classiques )**.**

1. Soit la suite définie par
$$u_0 = 1 \qquad u_1 = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$$
Exprimer le terme général de la suite puis calculer pour n entier la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$
2. Soit la suite définie par
$$u_0 = 1 \qquad u_1 = 1 \in \mathbb{R} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = -u_n$$
Exprimer le terme général de la suite puis calculer pour n entier la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$

Limite de Suites

Exercice 4.
Calculer les limites en $+\infty$ des suites dont le terme général est donné par les expressions suivantes.

1. $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
2. $n^2 \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$
3. $\sqrt{n} \ln\left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right)$
4. $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$
5. $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{3n}$
6. $(\cos(1/n))^n$

Exercice 5.
Calculer les limites en $+\infty$ des suites dont le terme général est donné par les expressions suivantes.

1. $\ln\left(\dfrac{n+1}{n^2+1}\right)\dfrac{1}{n}$
2. $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
3. $\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$
4. $(1+n)^{\frac{n}{1+n^2}}$
5. $\dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$
6. $\dfrac{\sin n}{n}$
7. $n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$
8. $n\tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Exercice 6 (Suite définie par récurrence).
Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=a\in\mathbb{R}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=1-u_n^2$$

1. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f\,x\mapsto 1-x^2$. Déterminez les solutions $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ de l'équation
$$f(x)=x \tag{E.1}$$
2. Quelles sont les limites possibles de la suite u ? Par la suite, on convient de noter α (resp. β) la solution négative (resp. positive) de l'équation (1).
3. On suppose dans cette question que $a\in[0,\beta[$
   (a) Démontrez que
   $$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{2n}\in[0,\beta[\text{ et } u_{2n+1}\in]\beta,1]$$
   .
   (b) Démontrez que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.
   (c) En déduire qu'elles sont convergentes et précisez leurs limites.
   (d) La suite u est-elle convergente ?
4. Etudiez de même le comportement de la suite u lorsque $a\in]\beta,1]$.

Exercice 7.
On considére la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=a\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et la relation de récurrence : n

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=\frac{u_n^2+1}{u_n-1}$$

1. Justifiez que (u_n) est bien définie.
2. Étudiez les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ et le signe de $f(x)-x$.
3. On suppose $a>1$. Montrez que pour tout entier non nul $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\geqslant 2(1+\sqrt{2})$. Montrez que la suite est croissante et déterminez sa limite.

Exercice 8.
Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=-2$ et la relation de récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=\frac{2u_n}{3-u_n}$$

1. Méthode 1
   Utilisation d'une suite auxiliaire :
   Considérons la suite auxiliaire $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $n\in\mathbb{N}$, par $v_n=\dfrac{u_n}{1-u_n}$
   (a) Démontrez que v est une suite géométrique.
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   (c) Montrez que u est convergente et précisez sa limite.

2. Méthode 2.
   Utilisation d'une inégalité :
   (a) Montrez que la suite u vérifie
   $$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1}| \leqslant \frac{2}{3}|u_n|$$
   .
   (b) En déduire que u converge et déterminez sa limite.
   (c) Déterminez un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont dans l'intervalle ouvert $]-10^{-2}, 10^{-2}[$.

Exercice 9 (Suite implicite)**.**
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x + tanx = n$ d'inconnue $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n cette équation possède une solution unique notée x_n .
2. En utilisant la croissance stricte de la fonction $x \mapsto x + \tan x$ sur l'intervalle considéré, montrer que la suite et monotone et donner sa monotonie.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Séries

Exercice 10 (Calcul de somme; série de références)**.**
Calculer, si elles convergent, la somme totale des séries suivantes

1. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^n}$
2. $\sum_{n\geqslant 2} \frac{3}{7^n}$
3. $\sum_{n\geqslant 0} nq^n$ avec q réel
4. $\sum_{n\geqslant 0} n(n-1)q^n$ avec q réel
5. $\sum_{n\geqslant 0} n^2 q^n$ avec q réel
6. $\sum_{n\geqslant 0} n\frac{x^n}{n!}$ avec x réel

Exercice 11 (Théorème de comparaison)**.**
Les séries suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\sum \frac{n}{n^3+n^2+1}$
2. $\sum \frac{1}{n-1}$
3. $\sum \frac{1}{n!+n^2}$
4. $\sum \frac{e^n}{n^{100}}$
5. $\sum e^{-\sqrt{\ln n}}$

Exercice 12 (Calcul de sommes, télescopage)**.**
Calculer la somme des séries suivantes.

1. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$
2. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2-1}$.
3. $\sum\limits_{n\geqslant 2} \ln\left(\frac{1+n}{n-1}\right)$
4. $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}$

Dans chacun des cas écrire une fonction python `sommeapartielle(n)` qui calcule la somme partielle de rang n.

Exercice 13 (Plus dur)**.**
Calculer la somme des séries suivantes.

1. $u_n = \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} \quad (n \geqslant 0)$
2. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1 + \frac{2}{n(n+3)}\right)$

Exercice 14 (Convergence absolue)**.**
Les séries suivantes sont-elles absolument convergentes ?

1. $\sum \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$
2. $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{(3n-1)}$
3. $1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}} - \dfrac{1}{\sqrt{7}} + \dots$
4. $\dfrac{1}{8} - \dfrac{2}{12} + \dfrac{3}{16} - \dfrac{4}{20} + \dots$
5. $\sum \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$
6. $\sum \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$

Exercice 15 (Convergence absolue)**.**
Les séries suivantes sont-elles absolument convergentes ?

1. $\sum \left(\dfrac{1}{n} - 1\right)^n$
2. $\sum \left(\dfrac{1-n}{1+n}\right)^n$
3. $\sum \dfrac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n}$
4. $\sum \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$
5. $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$
6. $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^{1/n}}$
7. $\sum (-1)^n \dfrac{2^n}{n^2}$
8. $\sum \dfrac{(-1)^n n}{e^n}$
9. $\sum \dfrac{\sin(n)}{n^2}$
10. $\sum \dfrac{\cos(n)}{n^2 - 1}$
11. $\sum \dfrac{(-1)^n}{n!}$

Exercice 16.
Calculer la somme des séries dont le terme général est

1. $\dfrac{n^2 - n}{(n+3)!}$
2. $\dfrac{(n+2)(n+1)}{2^{n+3}}$

Problèmes

Suites définies par récurrence

Exercice 17.
On considère la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$ et $u_0 \geqslant 0$.

1. Étudier f et le signe de $f(x) - x$. Quelles sont les limites possible de (u_n) ?
2. On suppose $u_0 \in [0; 1/4]$. Montrer que pour tout $u_n \in [0; 1/4]$ puis que (u_n) est croissante.
3. Quelle est la nature de (u_n) (si elle est convergente, préciser sa limite) ?
4. On suppose $u_0 \in [1/4; 3/4]$. Montrer que (u_n) est décroissante et minorée. Quelle est la nature de (u_n) (si elle est convergente, préciser sa limite) ?
5. On suppose $u_0 > 3/4$. Montrer que (u_n) est croissante. Quelle est la nature de (u_n) (si elle est convergente, préciser sa limite) ?

Exercice 18 (Suite récurrente et fonction logarithme)**.**
On note f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 + \ln x$. Soit u la suite définie par son premier terme $u_0 \geqslant 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer que la suite est bien définie et qu'elle est minorée par 1.
2. Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $[1; +\infty[$.
3. Étudier la monotonie de u.
4. En déduire que (u_n) est convergente, et donner sa limite.

Exercice 19.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$

1. (a) Montrer que$f$ est paire.
   Etudier les variations de f e
   (b) Montrer qu'il existe un unique réel ℓ tel que $f(\ell) = \ell$.
   Justifier : $0 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{2}$ (on donne $f(1/2) < 1/2$)
   (c) Montrer que pour tout réel x : $|f'(x)| \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$
2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$u_0 = 0 \qquad \text{et } \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\qquad u_n \in [0, \dfrac{1}{2}]$
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell| \qquad \text{puis} \qquad |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$$
   (c) En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ.
   (d) Ecrire un programme python permettant d'obtenir une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

Exercice 20.
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -2$ et la relation de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n}{3-u_n}$$

1. Écrire une fonction `function y=suite(n)` qui calcule le terme n de cette suite.
2. Méthode 1
   Utilisation d'une suite auxiliaire :
   Considérons la suite auxiliaire $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$
   (a) Démontrez que v est une suite géométrique.
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   (c) Montrez que u est convergente et précisez sa limite.
3. Méthode 2.
   Utilisation d'une inégalité :
   (a) Montrez que la suite u vérifie
$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1}| \leqslant \frac{2}{3}|u_n|$$
   .
   (b) En déduire que u converge et déterminez sa limite.
   (c) Déterminez un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont dans l'intervalle ouvert $]-10^{-2}, 10^{-2}[$.

Exercice 21 (Suite définie par récurrence et série !)**.**
Soit u la suite définie par
$$u_0 \in]0;1[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Montrer que pour tout entier n on a $u_n \in]0;1[$.
2. Montrer que la suite u est décroissante et étudier sa limite.
3. Montrer que la série $\sum u_n^2$ est convergente et calculer sa somme.
4. En calculant les sommes partielles, montrer que la série $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.
5. Trouver un équivalent de $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et en déduire que la nature de la série $\sum u_n$.

Exemples de suites définies implicitement

Exercice 22.
Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n(x) = x - n.\ln(x)$.

1. (a) Etudier cette fonction et dresser son tableau de variations.
   (b) En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux réels $u_n$et $v_n$solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiants $0 < u_n < n < v_n$.
2. Etude de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$.
   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 3, 1 < u_n < e$.
   (b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que (u_n) est décroissante.
   (c) En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 3}$ converge et montrer, en encadrant $\ln(u_n)$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
   (d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$; en déduire que $u_n - 1 \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 23.
Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + n\,x$.

1. (a) Déterminer, pour tout réel x, $f_n'(x)$ et $f''(x)$.
   (b) En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
2. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n.
   (b) Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \dfrac{-1}{n} < u_n < 0$.
   (c) En déduire la limite de la suite (u_n)
   (d) En revenant à la définition de u_n, montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{2n}$.

Exercice 24 (Sans indication!)**.**
Soit $n \in \mathbb{N}$, Montrer que l'équation $xe^x = n$ possède dans $\mathbb{R}_+$, une unique solution x_n . Étudier la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Autres

Exercice 25.
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1+\sqrt{\cdots + \sqrt{2+\sqrt{1}}}}}$$

1. Écrire une fonction `suite(n)` qui calcule le terme n de cette suite.
2. Montrer que $\lim u_n = +\infty$
3. Trouver une relation simple entre u_n et u_{n+1}.
4. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant slant n$ et que $u_n = o(n)$
5. Trouver un équivalent simple de (u_n).
6. Trouver la limite de $u_n - \sqrt{n}$

Exercice 26.
On pose pour n entier strictement plus grand que 1

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{k}$$

1. Montrer que $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes.
2. En déduire la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. La série converge-t'elle absolument ?

Résultats hors programme

Exercice 27 (Série de Rieman)**.**
Les séries de Riemann sont les séries de la forme $\sum \frac{1}{n\alpha}$ où α est une constante. Les cas vus en cours sont $\sum \frac{1}{n}$ où α vaut 1 et $\sum \frac{1}{n^2}$ où $\alpha vaut 2$

1. $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ est elle une série de Riemann ?
2. $\sum \sqrt{n}$ est elle une série de Riemann ?
3. $\sum \frac{1}{n^n}$ est elle une série de Riemann ?
4. On veut démontrer la proposition suivante « La série $\sum \frac{1}{n\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
   (a) Montrer que si $\alpha \leqslant 0$ alors la série diverge.
   (b) En s'inspirant de la démonstration vu en cours pour les cas $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$ démontrer les autres cas

Exercice 28 (comparaison cas $= o()$)**.**
Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que (v_n) ne s'annulle pas à partir d'un certain rang. On dit (u_n) est négligeable devant (v_n) au voisinage de l'infini si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

On veut démontrer le résultat suivant
« Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries **à termes positifs** et telles que :

$$u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$$

- Si de plus la série $\sum v_n$ est convergente alors la série $\sum u_n$ est convergente.
- Si de plus la série $\sum u_n$ est divergente alors la série $\sum u_n$ est divergente .

»

On suppose que $u_n = o(v_n)$ au voisinage de $+\infty$

1. Démontrer qu'il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $n \geqslant n_0$ alors $u_n \leqslant v_n$.
2. Conclure.

Exercice 29 (Une série exponentielle)**.**
On rappelle que $0! = 1$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,\mathrm{d}x$$

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.
2. (a) Montrer que pour tout naturel n, $\frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}$.
   (b) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. (a) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, u_n en fonction de u_{n-1} et de n.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = n!\left(\mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$$

4. Des questions précédentes, déduire la limite de $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 30 (Critère de d'Alembert)**.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une série à termes strictement positifs, on suppose de plus que

$$\lim_{+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda \in \mathbb{R}$$

1. On suppose dans cette question que $\lambda \in [0; 1[$, et on note $\mu = \dfrac{\lambda+1}{2}$
   (a) Montrer que $\lambda < \mu < 1$
   (b) Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0
   $$u_{n+1} \leqslant \mu u_n$$
   (c) En déduire que pour tout entier n plus grand que n_0
   $$u_n \leqslant \mu^{n-n_0} u_{n_0}$$
   (d) En déduire que la série $\sum u_n$ converge
2. On suppose maintenant que $\lambda > 0$
   (a) Montrer qu'il existe un réel μ et un entier naturel n_0 tel que pour tout entier plus grand que n_0
   $$u_n \geqslant \mu^{n-n_0} u_{n_0}$$
   (b) En déduire la nature de $\sum u_n$
3. En utilisant les résultats précédent étudier la nature des séries de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$ et $\dfrac{n^n}{n!}$