Probabilités : Théorèmes limites

BCPST Spé 2 Lycée Champollion Grenoble

Mars 2025

Table des matières

I Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev. 2
- I.1 Inégalités 2
- I.2 Loi faible des grands nombres 2

II Convergence en loi 3
- II.1 Définitions 3
- II.2 Caractérisation pour les variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$. 4
- II.3 Exemple à connaître d'approximation 4

III Théorème central limite 5
- III.1 Préliminaires 5
- III.2 Le théorème et ses applications 7
- III.3 Un cas particulier le théorème de Moivre-Laplace 10

IV Un exemple de test 11
- IV.1 Deuxième forme du théorème central limite 11
- IV.2 Test de conformité à la moyenne 11
- IV.3 Cas d'une proportion 12

I Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

I.1 Inégalités

Théorème 1 (Markov)**.**
*Si X est une variable aléatoire réelle à **valeurs positives** admettant une espérance alors*

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \qquad \mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a}$$

Démonstration :

Théorème 2 (Bienaymé-Tchebichev)**.**
*Soit X une variable aléatoire réelle **admettant un moment d'ordre 2** alors*

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Démonstration :

I.2 Loi faible des grands nombres

Définition 1 (Moyenne empirique)**.**
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires la moyenne empirique *est*

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots X_n}{n}$$

On trouve très fréquemment la notation $\overline{X_n}$.

Théorème 3 (Loi faible des grands nombres)**.**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes admettant une même espérance m et une même variance et soit pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

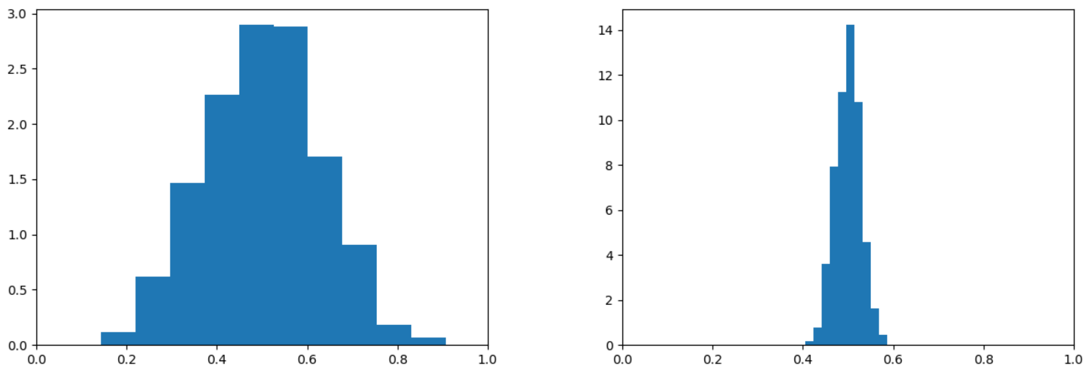
Alors

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|M_n - m| \geqslant \varepsilon) = 0$$

programme Python .

On cherche à illustrer la loi des faible des grands nombres. On va commencer par calculer la moyenne de la simulation de n variables aléatoires qui suivent une loi uniforme sur $[0;1[$. Puis on va recommencer cette expérience un grand nombre de fois et on va visualiser ces résultats à l'aide de `hist`

```
n=100 #celui qui apparait dans le théorème
L=1000 #nombre de repetitions

Moyennes=[]
for i in range(L):
        R=rd.random(n)
        Moyennes.append(np.mean(R))
plt.xlim(0,1)
plt.hist(Moyennes,density=True,align=color='teal')
plt.show()
```



(a) $n = 10$ (b) $n = 1000$

FIGURE 1 – Deux illustrations de la loi des grands nombres avec la loi uniforme

II Convergence en loi

II.1 Définitions

Définition 2 (Convergence en loi)**.**
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires et* X *une autre variable aléatoire.*

On note F_n la fonction de répartition de X_n et F_X celle de X.
*On dit que $(X_n)_{n_i n\mathbb{N}}$ **converge en loi** vers X si et seulement si pour tout réel x où F_X est continue*

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F_X(x)$$

On note alors

$$X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$$

Attention : Il faut bien faire attention aux x et n.
Exemple : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n \hookrightarrow \mathscr{E}\left(\lambda + \dfrac{1}{n}\right)$, étudions la limite

II.2 Caractérisation pour les variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Théorème 4.
*On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires **à valeurs dans** $\mathbb{Z}$ et que X est une variable aléatoire **à valeurs dans** $\mathbb{Z}$. Alors $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ si et seulement si*

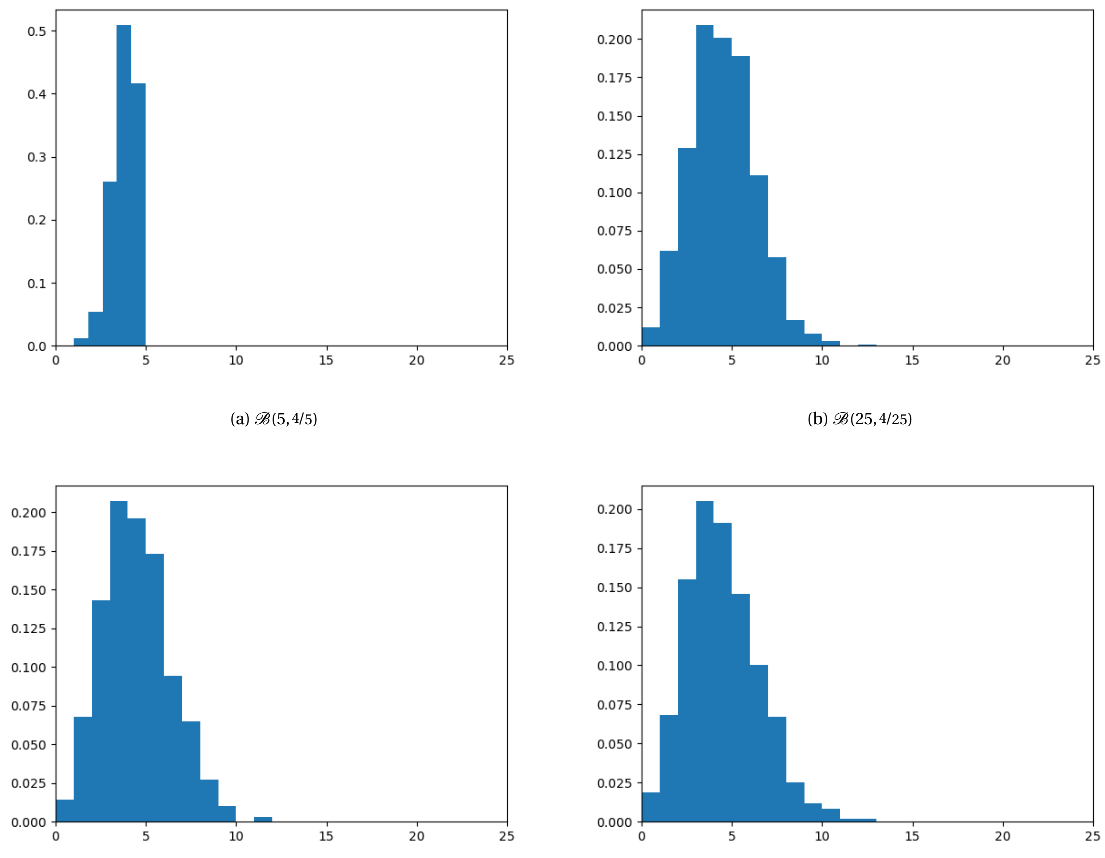
$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$$

On a remplacé un critère sur les fonctions de répartition par un critère sur les lois de probabilités !

II.3 Exemple à connaître d'approximation

Théorème 5.
Soit λ un paramètre réel fixé et strictement positif.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables telle que $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, \lambda/n)$ alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$.

Démonstration :



(a) $\mathscr{B}(5, 4/5)$

(b) $\mathscr{B}(25, 4/25)$

(c) $\mathscr{B}(50, 4/50)$

(d) $\mathscr{P}(4)$

FIGURE 2 – Convergence des lois binomiales $\mathscr{B}(n, 4/n)$ vers la loi de Poisson $\mathscr{P}(4)$

III Théorème central limite

Cette partie justifie pourquoi la loi normale (centrée-réduite) est si importante.

III.1 Préliminaires

Proposition 1 (Rappel : transformation affine d'une variable aléatoire.)**.**
Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et si a et b sont deux réels $a > 0$ et b deux réels alors $Y = aX + b$

$$Y \hookrightarrow \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

Méthode pour centrer et réduire une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2 (elle admet donc une espérance μ et un écart-type σ). en posant

$$X^* = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

On constate que

$$E(X^*) = 0 \qquad V(X^*) = 1$$

Donc X^* est une variable aléatoire réduite et centrée !

Soit X une variable aléatoire admettant un écart type σ et une espérance μ alors si on pose

$$X^* = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

cette variable aléatoire vérifie

$$E(X^*) = 0 \qquad V(X^*) = 1$$

X^* est **centrée** et **réduite** .

Démonstration :

En combinant la stabilité des lois normales pour les transformations affines et la remarque précédente, on peut transformer toute loi normale en une loi normale réduite et centrée.

Méthode pour se ramener à une loi normale réduite-centrée.

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ on pose

$$X^* = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

D'après les résultats précédents

$$X^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Réciproquement on peut écrire

$$X = \sigma X^* + \mu$$

Utilisation des tables de la loi normale On va utiliser cette table qui donne les valeurs de Φ, fonction de répartition de la loi normale, pour les réels positifs. On considère

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(2,4)$$

et on voudrait avoir une approximation de

$$\mathbb{P}(3 \leqslant X \leqslant 4)$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(3 \leqslant X \leqslant 4) &= \mathbb{P}(-1 \leqslant X-2 \leqslant 2) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{1}{2} \leqslant X^* \leqslant 1\right) \\
&= \Phi(1) - \Phi\left(\frac{1}{2}\right) && \text{définition de la fonction de répartition} \\
&\approx 0,8413 - 0,6915 && \textbf{En lisant sur une table} \\
&\approx 0,1498
\end{aligned}$$

Exercice 1.
Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(1,3)$, donner une approximation de $\mathbb{P}(1 \leqslant X \leqslant \sqrt{3})$ On donne $1/\sqrt{3} \approx 0,577$.

Cas d'une moyenne Soit X_1 $X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même espérance μ et de même écart-type σ. On pose

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

alors la variable aléatoire centrée et réduite associée est

$$M_n^* =$$

Démonstration :
Il suffit de montrer que

$E(M_n) =$ $V(M_n) =$

III.2 Le théorème et ses applications

Théorème 6 (Théorème limite central)**.**
Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, et admettant une espérance μ et variance σ^2 non nulle, la suite des variables aléatoires centrées réduites

$$M_n^* =$$

associées aux variables

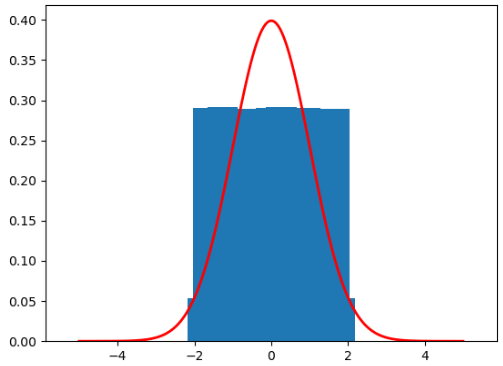
$$M_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
D'où, on a pour tout (a,b) tel que $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$

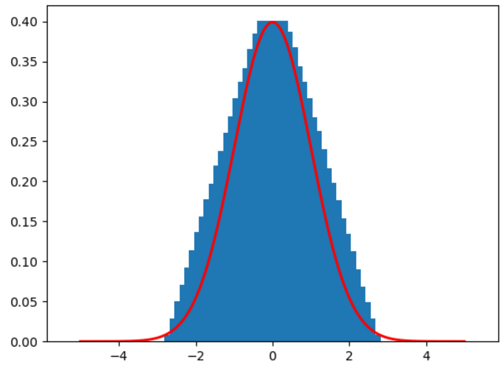
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(a \leqslant M_n^* \leqslant b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \qquad \mathrm{d}t$$

Code Python à compléter

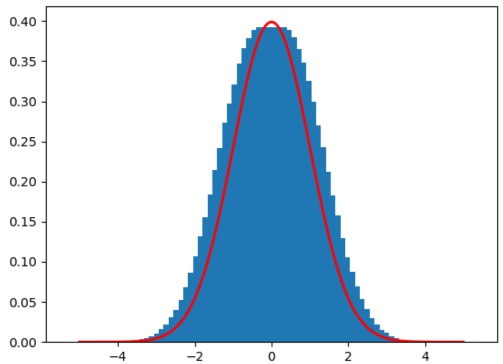
```
def phi(x):
        return ............
#tracé de la gaussienne
x=np.arange(-5,5,0.01)
y=phi(x)
plt.plot(x,y,color='red',linewidth=2)

#tracé de l'histogramme
n=50 # celui qui apparaît dans la limite
L =10**9 # nombre de simulation



sigma=.....
moyenne=.........
Mn=[]
for i in range(L):
        Xn.append(np.mean(rd.random(n)))


MnEtoile=............



plt.hist(MnEtoile)
plt.show()
```



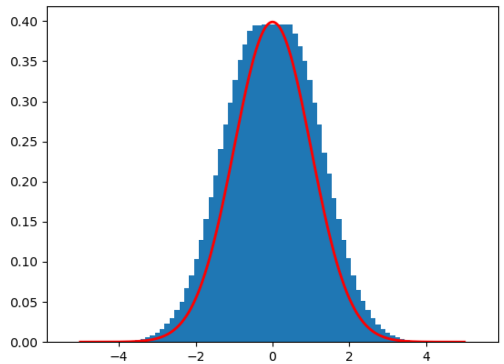
(a) $n = 1$



(b) $n = 3$



(c) $n = 8$



(d) $n = 50$

FIGURE 3 – Illustration du théorème central limite

Un exemple On suppose que l'intervalle de temps entre deux voitures successives à un passage à niveau (peu fréquenté) suit une loi exponentielle de moyenne 30 minutes. On suppose de plus qu'il y a indépendance entre les intervalles de temps séparant les instants de passage de voitures. Calculons (une valeur approchée) de la probabilité qu'il y ait plus de 50 voitures qui empruntent le passage à niveau une journée donnée.

On note X_i l'intervalle exprimé en minutes séparant le véhicule $i-1$ du véhicule i, X_1 représentant l'intervalle entre le début de la journée et le temps de passage de la première voiture.

Les $(X_i)_{i\geqslant 1}$ forment une suite de variable aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{30}$ et vérifient dont

$$\forall i \in \mathbb{N}^* \qquad E(X_i) = 30 \qquad V(X_i) = 30^2 = 900 \qquad \sigma_{X_i} = 30$$

Le temps écoulé entre le début de la journée et le passage de la n-ième voiture est donc

$$S_n =$$

On cherche donc à déterminer

$$\mathbb{P}(S_{50} < T)$$

où $T = 24 * 60$ est la durée d'une journée exprimée en minutes

On pose

$$M_{50} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_50}{50} = \frac{S_{50}}{50}$$

et la variable centrée réduite associée

$$M_{50}^* = \sqrt{50}\,\frac{M_{50} - 30}{30} = \sqrt{50}\,\frac{S_{50} - 30 \times 50}{30 \times 50} = \frac{S_{50} - 30 \times 50}{30 \times \sqrt{50}}$$

On cherche donc à estimer la probabilité équivalente

$$\mathbb{P}\left(M_{50}^* \leqslant \frac{T - 30 \times 50}{30 \times \sqrt{50}}\right)$$

D'après le théorème central limite, on peut faire l'approximation suivante

$$\mathbb{P}\left(M_{50}^* \leqslant \frac{T - 30 \times 50}{30 \times \sqrt{50}}\right) = \Phi\left(\frac{T - 30 \times 50}{30 \times \sqrt{50}}\right)$$

Or

$$\begin{aligned}
\frac{T - 30 \times 50}{30 \times \sqrt{50}} &= \frac{24 \times 60 - 30 \times 50}{30 \times \sqrt{50}} \\
&= \frac{24 * 2 - 50}{\sqrt{50}} \\
&= -\frac{2}{\sqrt{50}} \\
&\approx -0.283
\end{aligned}$$

$$\Phi(-0.283) = 1 - \Phi(0.283) \approx 1 - 0.61 \approx 0.39$$

La probabilité qu'il y ait moins de 50 voitures est environ 0.39

III.3 Un cas particulier le théorème de Moivre-Laplace

Théorème 7 (Théorème de Moivre-Laplace)**.**

Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathscr{B}(p)$, et si on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

D'où, on a pour tout (a, b) tel que $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(a \leqslant \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \qquad \mathrm{d}t$$

Remarque : dans ce cas S_n suit une loi $\mathscr{B}(n, p)$

IV Un exemple de test

IV.1 Deuxième forme du théorème central limite

Définition 3 (Variance empirique)**.**
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoires la* moyenne empirique *est*

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots X_n}{n}$$

La variance empirique *est donnée par*

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - M_n)^2$$

La variance empirique corrigée *est donnée par*

$${S'_n}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - M_n)^2$$

Théorème 8 (Théorème centrale seconde forme)**.**
Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, et admettant une espérance* μ *et une variance* σ^2 *non nulle, la suite des variables aléatoires centrées réduites*

$$\frac{M_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} = \sqrt{n}\frac{M_n - \mu}{S_n}$$

converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

IV.2 Test de conformité à la moyenne

Exemple : à la sortie d'une chaîne de fabrication d'un médicament on aimerait tester la quantité de la molécule active des comprimés produits. Un comprimé doit contenir un mg de produit actif. On prélève un échantillon de 10 comprimés, on les détruits pour mesurer la quantité de produit actif et on mesure [1]

$[0.79, 0.95, 0.85, 1.26, 0.97, 0.86, 1.09, 1.02, 0.85, 1.18, 0.7, 0.72, 0.83, 0.75, 1.15, 0.97, 0.94, 0.93, 0.67, 1.14, 0.95, 0.63, 0.89, 0.8, 0.93, 1.09, 0.96, 0.71, 1.16, 0.94, 0.81, 0.95, 1.01, 0.96, 1.01]$

On calcule la moyenne empirique de la série : 0.93 mg. Se pose alors la question de savoir si cet écart par rapport à la moyenne attendue peut être attribué au hasard ou si la chaîne de fabrication doit être recalibrée.

Vocabulaire

- Un **caractère quantitatif** d'une population est modélisé par une variable aléatoire X suivant une loi dont on connaît la moyenne μ
- Un **échantillon** est la donnée de de $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires indépendantes aléatoirement distribuée, qui suivent toutes la même loi que X. C'est une modélisation de la suite de mesure.
- L'**hypothèse nulle** $\mathscr{H}_0$ est ici l'hypothèse que la valeur mesurée de la moyenne est égale à la moyenne attendue μ.
- L'**hypothèse alternative** $\mathscr{H}_1$ est ici l'hypothèse que la valeur mesurée de la moyenne est différente de la moyenne attendue μ.
- On définit deux mesures de risque
    1. Le **risque de première espèce** est la probabilité de rejeter l'hypothèse $\mathscr{H}_0$ alors qu'elle est vraie

$$\mathbb{P}_{\mathscr{H}_0 \text{ est vraie}}(\text{on rejette } \mathscr{H}_0)$$

1. données imaginaires

2. Le **risque de deuxième espèce** est la probabilité d'accepter l'hypothèse $\mathscr{H}_0$ alors qu'elle est fausse

$$\mathbb{P}_{\mathscr{H}_0 \text{ est fausse}}(\text{on accepte } \mathscr{H}_0)$$

On peut avoir des seuils d'acceptation de risque différents, par exemple dans l'exemple le seuil du risque de deuxième espèce sera plus petit que celui de première espèce.

Théorème 9.
En reprenant les notations précédentes et en supposant $\mathscr{H}_0$ vraie. On pose $\alpha \in]0;1[$ le risque de première espèce choisi et Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{M_n-\mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}\right| > u_{1-\alpha/2}\right) \simeq \alpha$$

où $u_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$ est le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi normale réduite centrée

Exemple :

```
Echantillon=np.array([0.79, 0.95, 0.85, 1.26, 0.97, 0.86, 1.09, 1.02, 0.85, 1.18, 0.7 ,
0.72, 0.83, 0.75, 1.15, 0.97, 0.94, 0.93, 0.67, 1.14, 0.95, 0.63,
0.89, 0.8 , 0.93, 1.09, 0.96, 0.71, 1.16, 0.94, 0.81, 0.95, 1.01,
0.96, 1.01])
Moyenne=np.mean(Echantillon)

mu=1
Moyenne=np.mean(Echantillon)
EcartType=np.std(Echantillon,ddof=0) # non corrigé

from scipy.stats import norm
alpha=0.05
n=len(Echantillon)
quantite=abs((Moyenne-mu)/(EcartType/np.sqrt(n)))

quantile =norm.ppf(1-alpha/2)
print(quantite,quantile)
>>>2.86592879762443 2.5758293035489004
```

La quantité calculée est plus grande que le quantile choisi, ce qui sous l'hypothèse nulle $\mathscr{H}_0$ n'arrive que dans 1% des cas, on rejette l'hypothèse nulle, on considère que la production est défaillante et on a, à des approximations prêt, 1% de chance de se tromper

IV.3 Cas d'une proportion

Si on cherche à connaître la proportion d'un caractère dans une population, on est amener à étudier des variables aléatoires qui ne prennent que deux valeurs 0 "absence " et 1 "présence" dans ce cas là la moyenne et la fréquence sont confondues

Exemple : D'après `http://www.biostathandbook.com`
Lors d'une expérience *Yukilevich et True (2008)* ont rassemblé ensemble 30 drosophiles mâles et 30 drosophiles femelle d'Alabama avec les mêmes quantités de drosophiles des Bahamas.. Ils ont compté 246 accouplements dont 140 homotypiques (mâle et femelle de la même origine) et 106 hétérotypiques (mâle et femelle d'origine différentes). L'hypothèse nulle est

$\mathscr{H}_0$les accouplements se font au hasard, la proportion d'accouplement homotypique doit être $1/2$

La proportion calculée est $^{140}/_{246} \simeq 0.57$ doit on rejeter l'hypothèse nulle ?

Proposition 2.
Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoires indépendantes suivant des loi binomiales $\mathscr{B}(p)$ et n alors l'intervalle

$$\left[\frac{X}{n} - \frac{u_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}}; \frac{X}{n} + \frac{u_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}}\right]$$

a une probabilité plus grande que $1-\alpha$ de contenir p.

```
#%% drosophile
homotypique= 140
heterotipique=106
total=homotypique+heterotipique
proportion = homotypique/total

print(proportion)
from scipy.stats import norm
alpha=0.05


quantile =norm.ppf(1-alpha/2)
ErreurS=quantile/(2*np.sqrt(total))
print(proportion -ErreurS,proportion+ErreurS)
```

0.5 n'est pas dans cet intervalle, on peut rejeter l'hypothèse nulle en ayant une probabilité inférieure à 5% de se tromper.

Critères d'approximation

Loi	Approximée par	Conditions	Remarques
$\mathscr{B}$(n,p)	$\mathscr{P}(np)$	$n \geqslant 30$ et $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$	Même espérance
$\mathscr{B}$(n,p)	$\mathscr{N}(np, np(1-p))$	• $n \geqslant 20$ et $p \leqslant 0.05$ • OU $n \geqslant 100$, $np \leqslant 10$	Même espérance, même variance
$\mathscr{P}(\lambda)$	$\mathscr{N}(\lambda,\lambda)$	$\lambda \geqslant 10$	Même espérance, même variance