DL mathématiques n°17
Réponses

1. (a) $DX = \begin{pmatrix} d_1x_1 \\ d_2x_2 \\ \vdots \\ d_nx_n \end{pmatrix}$.

   Donc $X^T DX = x_1d_1x_1 + \ldots + x_nd_nx_n = \sum_{i=1}^n d_i x_i^2$.

   (b)
   - Supposons que tous les d_i sont strictement positifs et que X est un vecteur non nul.
     Comme X est un vecteur non nul, il admet au moins une coordonnée non nulle. Notons x_k l'une d'elle.
     On a alors $X^T DX \geqslant d_k x_k > 0$.
   - Supposons que pour tout vecteur X non nul, $X^T DX > 0$.
     Notons X_i le vecteur colonne dont tous les éléments sont nul, sauf celui à la $i$ème ligne qui est égal à 1.
     On a alors $X_i^T DX_i = d_i$ et donc $d_i > 0$.
     Tous les coefficients diagonaux de D sont strictement positifs.

2. (a) $AU_1 = 4U_1$ et $U_1 \neq 0$ donc U_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 4.

   (b) En notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $AX = X \Leftrightarrow x + y + z = 0$.

   Donc $E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} / (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

   La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice de $E_1(A)$ et est visiblement libre. C'est donc une base de $E_1(A)$ et donc $\text{Dim}\,(E_1(A)) = 2$.

   On remarque alors que U_2 et U_3 appartiennent à $E_1(A)$, que (U_2, U_3) est une famille orthogonale donc libre et que $\text{Card}\,(U_2, U_3) = \text{Dim}\,(E_1(A))$.

   Donc (U_2, U_3) est une BON de $E_1(A)$.

   (c) i. Après calcul on obtient $P^T \times P = I_3$ donc P est inversible et $P^{-1} = P^T$.

   ii. P étant la matrice constituée des vecteurs propres de A, on sait que $A = P \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^T$.

   En posant $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a bien $A = PD^2P^T$.

   (d) On pose $M = PDP^T$. On a alors :

   $$MM^T = PDP^T \times PDP^T = PD^2P^T = A.$$

   On peut même remarquer que $M^T = M$.

(e) $C^T = \left((M^T)^{-1}\right)^T B^T (M^{-1})^T = M^{-1} B (M^{-1})^T$ car B est symétrique et car $(Y^{-1})^T = (Y^T)^{-1}$.

Donc C est une matrice symétrique réelle.

D'après le théorème spectral on peut donc affirmer qu'il existe une matrice Q inversible et telle que $Q^{-1} = Q^T$ et une matrice diagonale Δ telles que $C = Q\Delta Q^T$. On a alors :

$$Q\Delta Q^T = M^{-1} B (M^{-1})^T si et seulement si B = MQ\Delta(MQ)^T.$$

(f) $RR^T = MQ(MQ)^T = MQQ^T M^T = MM^T$ car $Q^{-1} = Q^T$. Donc $RR^T = A$.

3. (a) Pour tout X vecteur colonne non nul on a $X^T(A-B)X > 0$. Or

$$\begin{aligned} X^T(A-B)X &= X^T(RR^T - R\Delta R^T)X \\ &= (R^T X)^T (I_3 - \Delta)(R^T X) \end{aligned}$$

Comme R est inversible (M et Q sont inversibles), pour tout Y vecteur colonne non nul, il existe X tel que $Y = R^T X$ et donc, en posant $S = I_3 - \Delta$ on a $Y^T S Y > 0$.

(b) D'après la question 1, tous les coefficients diagonaux de S sont strictement positifs. Or, si on note δ_i les coefficients diagonaux de Δ, les coefficients de S sont $1 - \delta_i$.

On a donc $\delta_i < 1$.