Sujet MMI 2024

Les parties marquées d'un ⛰, ne doivent être abordées que si vous avez de l'avance.
Ce sujet est une adaptation de l'épreuve de modélisation de 2024, on pourra trouver le sujet original https://www.concours-agro-veto.net/spip.php?rubrique350.
Dans ce TP, on propose d'étudier différents modèles d'évolution de population, et d'étudier les conditions de son extinction. Il est composé de trois parties indépendantes.
La première partie propose d'étudier des modèles déterministes discrets.
La deuxième partie propose d'étudier des modèles déterministes continus.
La troisième partie se propose d'étudier le modèle probabiliste de Galton-Watson

> **À programmer 1.**
> importer les modules `matplotlib.pyplot`, `numpy` et `numpy.random` avec les alias respectifs `plt`, `np`, `rd`.

I Modèle déterministe discret

On définit une suite (v_n) par :

$$v_0 \in \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2} v_n \left(\frac{S - v_n}{S}\right)$$

où $S \in]0; +\infty[$ est une constante du problème. v_n est le nombre d'individu à la génération n.

> **À programmer 2.**
> Recopier et compléter le programme suivant

```python
S = 30
v0 = 5
L=[v0]
v=v0
for k in ## LIGNE A COMPLETER ##
    ## LIGNE A COMPLETER ##
    ## LIGNE A COMPLETER ##
plt.plot(L, marker="*",linestyle='none')
plt.xlabel("n")
plt.ylabel("v_n")
plt.show()
```

> **À programmer 3.**
> On fixe $S = 30$, tracer sur un même graphe les suites obtenues pour $v_0 \in \{0, 5, \ldots, 35\}$.
> Interpréter le résultat

II Modèles continus

On note maintenant y la population à l'instant t et on modélise l'évolution de la population par

$$y'(t) = F(y(t))$$

avec

$$F(y) = \frac{y}{2}\left(\frac{S-y}{S}\right)\left(\frac{y-A}{S}\right) \text{ et une condition initiale } y(0) \geqslant 0$$

A et S sont deux constantes.
On cherche maintenant à utiliser la méthode d'Euler pour étudier le comportement des solutions de l'équation différentielle

> **À programmer 4.**
> Écrire une fonction `F(y)` qui renvoie la valeur de $F(y)$. On fixera $S = 30$ et $A = 5$

On rappelle le principe de la méthode d'Euler pour résoudre

$$y'(t) = G(y, t)$$

Pour calculer une solution approchée sur un intervalle $[a; b]$ par la méthode d'Euler :

- On subdivise l'intervalle à l'aide de $n+1$ valeurs $t_0 = a, t_1, \ldots, t_n = b$ régulièrement espacées d'un **pas**
$$h = \frac{b-a}{n} \qquad \text{(avec } n \in \mathbb{N}^*\text{)}$$
- La valeur de $y_0 = y(a)$ est **connue** (c'est la condition initiale) ;
- On approche successivement les valeurs de y en $t_1, t_2, \ldots, t_n$ en utilisant le fait que, pour h 'petit', la tangente à la courbe de la fonction y est 'très proche' de la courbe de y : $y(t_{k+1}) \approx y_{k+1}$, où
$$y_{k+1} = y'(t_k)(t_{k+1} - t_k) + y(t_k)$$
est l'ordonnée du point d'abscisse t_{k+1} sur la **tangente à la courbe** de y au point $M_k(t_k; y(t_k))$
Comme $t_{k+1} - t_k = h$ (le pas) et $y(t_k) \approx y_k$, on obtient :
$$\boxed{y_{k+1} = y'(t_k) \times h + y_k} \qquad y'(t_k) = G(y_k, t_k)$$
On peut ainsi calculer toutes les valeurs approchées y_k de façon récurrente à partir de y_0.

Sur papier 1.
Faire un dessin pour illustrer la méthode d'Euler. On devra faire figurer y_0, y_1, y_2,les tangentes et la courbe solution...

À programmer 5 (Méthode d'Euler)**.**
Recopier et compléter le programme suivant

```
def euler(f,y0,t_final,n):
    """méthode d'Euler
        f fonction définissant l' équation diff
         y0 valeur initiale en t= 0
         t_final borne de l'intervalle de calcul
         n nombre de pas
         renvoie la liste des temps et la liste des valeurs de y
    """
    pas= ????????????
    resultat=[y0]
    y=y0
    for i in range(1,n):
        y=???????????????
        resultat.append(y)
    temps=????????????
    return temps, resultat
```

À programmer 6 (Graphe et interprétation)**.**
Faire tracer les graphes des solutions pour $y_0 \in [\![0,35]\!]$. On prendra `t_final=20` et le nombre de pas égal à 10^7. Deviner les points d'équilibre stables et instables

III Modèle probabiliste de Galton-Watson

Un modèle de croissance probabiliste pour une espèce est le modèle de Galton-Watson. On considère une population dont on va décrire l'évolution génération par génération. On appelle Z_n la variable aléatoire qui compte le nombre d'individus à la génération n et on considère que :

- Les générations ne se superposent pas,
- Chaque individu a un nombre aléatoire de descendants : le nombre de descendants d'un individu est une variable aléatoire. Les variables aléatoires pour chacun sont indépendantes et de même loi.
  On s'intéresse aux conditions sous lesquelles on a extinction ou survie de l'espèce. On dit que la lignée est éteinte à la génération n si $Z_n = 0$ et on souhaite étudier la suite de terme général $P(Z_n = 0)$.

Formellement, le modèle est donné par :

$$Z_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}$$

où les variables aléatoires $(X_{n,i})_{(n,i)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ et sont indépendantes et de même loi. $X_{n,i}$ est le nombre de descendants de l'individu numéro i de la génération n. On notera Y une autre variable aléatoire qui suit la même loi que les variables $X_{n,i}$.

Par exemple, si $Z_n = 12$ alors $Z_{n+1} = X_{n,1} + \cdots + X_{n,12}$. Z_{n+1} est la somme du nombre de descendants de chacun des 12 individus de la génération n.

On remarquera que comme $Z_0 = 1, Z_1 = X_{0,1}$ qui est le nombre de descendants de l'unique individu de la génération 0 . Ainsi Z_1 et Y suivent la même loi.

Notre objectif est de faire des conjectures sur le comportement de la population. On considèrera que les variables aléatoires $X_{n,i}$ suivent la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
On rappelle que la commande `rd.poisson(x)` simule une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre x.

À programmer 7.
Compléter le programme suivant pour qu'il renvoie une simulation de l'évolution de la population, n représente le nombre maximal de génération que l'on simule.

```
1  def galton_watson(lambda_,n):
2      population = np.zeros(n+1)
3      population[0] = 1
4      Z = 1
5      for i in range(1,n+1):
6          descendants = 0
7          for j in range(???????????):
8              descendants += ??????????????
9          population[i] = descendants
10         Z = descendants
11         if descendants == 0:
12             return ?????????????
13     return ?????????????
```

Sur papier 2.
Pourquoi peut-on remplacer les lignes 6 à 8 par : `descendants = rd.poisson(Z*lambda_)`

À programmer 8 (Plusieurs simulations)**.**
Écrire un programme pour qu'il réalise 10 simulations pour $\lambda = 0,7$ et 20 générations et les trace sur un même graphique.

À programmer 9 (Variation de λ)**.**
Dans le programme précédent faire varier λ entre 0.7 et 1.7. À chaque fois interpréter l'évolution et le risque d'extinction de la population.

On s'intéresse à la probabilité d'extinction

À programmer 10.
Copier et modifier la fonction `galton_watson` pour qu'elle renvoie 1 si la lignée est éteinte et 0 si la lignée n'est pas éteinte?
On appelle la fonction ainsi modifiée : `galton_watson_2`.

À programmer 11.
Écrire une fonction `extinction`, qui prend en entrée un paramètre lambda_ et qui, à partir de 5000 simulations de Galton-Watson, renvoie une approximation de la probabilité d'extinction. (On s'arrêtera à 60 générations).

À programmer 12.
Tracer une graphique représentant la probabilité d'extinction en fonction de λ pour lambda entre 0,8 et 1,2 avec un pas de 0,05.

Sur papier 3 (⛰)**.**
Après n simulations, on note S_n le nombre d'entre elles qui ont mené à une extinction.

1. Après avoir justifié que S_n suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p_\lambda)$, montrer à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que, pour tout $\varepsilon > 0$,
$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p_\lambda\right| \geq \varepsilon\right) \leqslant \frac{p_\lambda(1-p_\lambda)}{n\varepsilon^2}.$$
2. Montrer ensuite que :
$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p_\lambda\right| \geq \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver $\varepsilon > 0$ (dépendant de n) tel que
$$P\left(\frac{S_n}{n} - \varepsilon \leq p_\lambda \leq \frac{S_n}{n} + \varepsilon\right) \geqslant 0,95.$$
4. Pour $n = 5000$, déterminer graphiquement l'encadrement de p_λ obtenu lorsque $\lambda = 1,05; \lambda = 1,1; \lambda = 1,15$.