SUITES ET SÉRIES : RÉPONSES

Suites classiques

Exercice 1.
Donner le terme général des suites suivantes, puis donner une fonction python `suite(n)` qui renvoie la valeur du nième terme de la suite.

1. $u_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = 2u_n$.
2. $u_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n + 4$.
3. $u_0 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = 2u_n - 1$.
4. $u_0 = 0, u_1 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$.
5. $u_0 = 1, u_1 = -1$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.
6. $u_0 = 1, u_1 = 2$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$

RÉPONSE:

On applique directement les méthodes du cours

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ $u_n = 2^n$

```
def suite(n):
        u=1
        for i in range(1,n+1):
                u=2*u
        return u
```

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 4n$

```
def suite(n):
        u=1
        for i in range(1,n+1):
                u=u+4
        return u
```

3. Pour $n \in \mathbb{N}$ $u_n = 1 - 2^n$

```
def suite(n):
        u=0
        for i in range(1,n+1):
                u=2*u-1
        return u
```

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{2}$

```
def suite(n):
        upre=0
        u=1
        for i in range(2,n+1):
                upre,u=u,3*u-upre
        return u
```

5. Pour $n \in \mathbb{N}$ $u_n = 1 - 2n$

```
def suite(n):
        upre=1
        u=-1
        for i in range(2,n+1):
                upre,u=u,2*u-upre
        return u
```

6. Pour $n \in \mathbb{N}$ $u_n = \sqrt{3}\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)$

```
def suite(n):
        upre=1
        u=2
```

```
for i in range(2,n+1):
        upre,u=u,u-upre
return u
```

*

Exercice 2 (Sommes classiques)**.**

1. Soit a un réel, on défini la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout entier n $u_{n+1} = au_n$. Soit p et n deux entiers tels que $p \leqslant n$, calculer
$$\sum_{k=0}^{n} u_k \qquad \text{puis } \sum_{k=p}^{n} u_k$$
Puis écrire des fonctions python permettant de calculer ces sommes sans utiliser les calculs théoriques que vous venez de faire.
2. Soit b un réel , on défini la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout entier n $u_{n+1} = u_n + b$. Soit p et n deux entiers tels que $p \leqslant n$, calculer
$$\sum_{k=p}^{n} u_k$$

<u>RÉPONSE</u>:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} a^k u_0 \\
&= u_0 \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \\
\sum_{k=p}^{n} u_k &= \sum_{k=p}^{n} a^k u_0 \\
&= u_0 a^p \sum_{k=p}^{n} a^{k-p} \\
&= u_0 a^p \sum_{k=0}^{n-1} a^k && \text{changement d'indice} \\
&= u_0 a^p \frac{1-a^{n-p+1}}{1-a}
\end{aligned}$$

Une version sans utiliser de puissance

```
def somme1(u0,a,p,n):
        u=u0
        for i in range(1,p+1):
                u=a*u
        s=0
        for i in range(p,n+1):
                s=s+u
                u=u*a
        return s
```

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{n} u_k &= \sum_{k=p}^{n} u_0 + kb \\
&= u_0 + b\sum_{k=p}^{n} k \\
&= u_0 + b\sum_{k=0}^{n-p} (k+p) && \text{changement d'indice} \\
&= u_0 + b\left[(n-p+1)p + \sum_{k=0}^{n-p} k\right] \\
&= u_0 + b\left[(n-p+1)p + \frac{(n-p+1)(n-p)}{2}\right] \\
&= u_0 + b\frac{(n-p+1)(n+p)}{2}
\end{aligned}$$

*

Exercice 3 (Sommes classiques).

1. Soit la suite définie par

$$u_0 = 1 \qquad u_1 = 2 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n$$

   Exprimer le terme général de la suite puis calculer pour n entier la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$
2. Soit la suite définie par

$$u_0 = 1 \qquad u_1 = 1 \in \mathbb{R} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = -u_n$$

   Exprimer le terme général de la suite puis calculer pour n entier la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$

RÉPONSE:

1. En utilisant la méthode du cours

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \frac{1}{2} + \frac{3^n}{2}$$

   Donc pour un entier $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{3^n}{2}\right) \\
&= \frac{n+1}{2} + \frac{1-3^{n+1}}{2(1-3)} \\
&= \frac{n+1}{2} + \frac{3^{n+1}-1}{4}
\end{aligned}$$

*

Limite de Suites

Exercice 4.
Calculer les limites en $+\infty$ des suites dont le terme général est donné par les expressions suivantes.

1. $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
2. $n^2\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$
3. $\sqrt{n}\ln\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right)$
4. $(\cos(1/n))^n$
5. $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$
6. $\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{3n}$

RÉPONSE:

1. On sait que $\ln(1+u) \sim_{u\to 0} u$ et $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et donc
$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$$
et donc
$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim_{n\to+\infty} 1$$
et finalement
$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$
2. De même
$$n^2\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \sim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n}$$
$$\lim_{n\to+\infty} n^2\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = -\infty$$
3. de même
$$\sqrt{n}\ln\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right) \sim_{n\to+\infty} -\frac{\sqrt{n}}{(n+1)^2} \sim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\ln\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right) = 0$$
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$
$$\begin{aligned}(\cos(1/n))^n &= \exp\left(n\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\\ &= \exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \text{ DL de } \cos u\\ &= \exp\left(n\left(-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \qquad \text{DL de } \ln(1+u)\\ &= \exp\left(-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\end{aligned}$$
$$\lim_{n\to+\infty} (\cos(1/n))^n = 1$$
5. Pour $n_i n\mathbb{N}^*$
$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \sim_{n\to+\infty} -\frac{n}{n}$$
$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \lim_{n\to+\infty} = -1$$
Par continuité de l'exponentielle
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-1}$$
6. Pour $n_i n\mathbb{N}^*$
$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{3n} = \exp\left(3n\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$
$$3n\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim_{n\to+\infty} -\frac{3n}{\sqrt{n}}$$
$$\lim_{n\to+\infty} 3n\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \lim_{n\to+\infty} = -\infty$$
Donc
$$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{3n} = 0$$

*

Exercice 5.
Calculer les limites en $+\infty$ des suites dont le terme général est donné par les expressions suivantes.

1. $\ln\left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)\frac{1}{n}$
2. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
3. $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$
4. $(1+n)^{\frac{n}{1+n^2}}$
5. $\dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$
6. $\dfrac{\sin n}{n}$
7. $n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$
8. $n\tan\left(\frac{1}{n}\right)$

RÉPONSE:

1. Pour $n\in\mathbb{N}^*$

$$\ln\left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)\frac{1}{n}=\frac{\ln(n+1)}{n}-\frac{\ln\left(n^2+1\right)}{n}$$

$$=\frac{\ln(n)}{n}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n}-2\frac{\ln n}{n}-\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n}$$

Et en utilisant les croissances comparées ou les opérations sur les limites pour chacun de des termes de cette somme

$$\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)\frac{1}{n}=0$$

2. Pour $n\in\mathbb{N}^*$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\sim_{+\infty}\frac{n}{n}$$

Donc en passant à la limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}^1$$

3. Pour $n\in\mathbb{N}^*$

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim_{+\infty}\frac{n}{n^2}$$

Donc en passant à la limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=\mathrm{e}^0=1$$

4. Pour $n\in\mathbb{N}^*$

$$\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\frac{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)}$$

$$=\sqrt{n}\frac{1-1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}\qquad DL_1\text{ de }\sqrt{1+u}$$

$$\sim_{n\to+\infty}n\frac{-\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=-\infty$$

5. Pour $n\in\mathbb{N}^*$

$$0\leqslant\left|\frac{\sin n}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n}$$

En utilisant le théorème des gendarmes

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\sin n}{n}\right|=0$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

$$n\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim_{n\to+\infty} \frac{n}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

$$n\tan\left(\frac{1}{n}\right) \sim_{n\to+\infty} \frac{n}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\tan\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

*

Exercice 6 (Suite définie par récurrence).
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 1 - u_n^2$$

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f\, x \mapsto 1 - x^2$. Déterminez les solutions $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ de l'équation :

$$f(x) = x$$

2. Quelles sont les limites possibles de la suite u ? Par la suite, on convient de noter α (resp. β) la solution négative (resp. positive) de l'équation (1).
3. On suppose dans cette question que $a \in [0, \beta[$
   (a) Démontrez que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{2n} \in [0, \beta[\text{ et } u_{2n+1} \in]\beta, 1]$$

   .

   (b) Démontrez que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.
   (c) En déduire qu'elles sont convergentes et précisez leurs limites.
   (d) La suite u est-elle convergente ?
4. Etudiez de même le comportement de la suite u lorsque $a \in]\beta, 1]$.

RÉPONSE:

1. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow 1 - x^2 = x \\ &\Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \end{aligned}$$

On pose $\Delta = 1 + 4 = 5$ et les solutions de cette équation sont

$$\alpha = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \qquad \beta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Il est clair que α et négatif et comme $\sqrt{5} > \sqrt{4}$, β est positif

Remarque : avec le programme python suivant on obtient un graphe

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

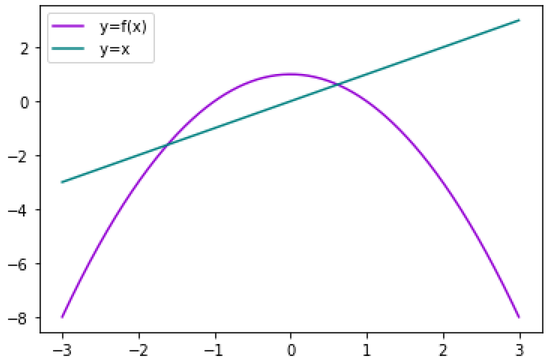
```python
##exo6

def f(x):
        return 1-x**2

a,b=-3,3
X=np.linspace(a, b,500)

plt.plot(X,f(X), color="darkviolet", label=" y=f(x)")
plt.plot(X,X, color="teal", label=" y=x", )
plt.legend()

plt.show()
```



On constate que la courbe de f est au dessus de la droite $y = x$ entre $]\alpha;\beta[$, en dessous à l'extérieur, ce que confirme bien le théorème sur le signe d'un binôme.

2. Si la suite (u_n) admet une limite réelle que l'on note ℓ, alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

En passant à la limite on obtient

$$\ell = f(\ell)$$

Le terme de droite est obtenu en utilisant la **continuité** de f sur $\mathbb{R}$, qu'il est **indispensable de rappeler** lors de cette réponse.
On en conclut

Les seules limites **réelles** possibles pour la suite sont α et β

3. (a) On commence par montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
On calcul $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$
Démontrons pour $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathscr{H}(n) \qquad u_{2n} \in [0;\beta[\text{ et } u_{2n+1} \in]\beta;1]$$

Initialisation Pour $n = 0$, par hypothèses $u_0 \in [0;\beta[$ donc la première partie de la conjonction est vraie.
De plus

$$\begin{aligned} 0 \leqslant u_0 < \beta \text{ donc } f(0) \geqslant f(u_0) > f(\beta) &\textbf{ car } f \textbf{ est strictement décroissar} \\ \text{donc } 1 \geqslant u_1 > \beta & \\ \text{donc } u_1 \in [\beta;1[& \end{aligned}$$

Ce qui démontre la deuxième partie de la conjonction, et donc $\mathscr{H}(0)$ est vriae

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons avoir montrer que

$$u_{2n} \in [0;\beta[\text{ et } u_{2n+1} \in]\beta;1]$$

Donc

$$\begin{aligned} \beta < u_{2n+1} \leqslant \text{ donc } f(\beta) > f(u_{2n+1}) \geqslant f(1) &\quad \text{stricte décroissar} \\ \text{donc } 0 \leqslant u_{2n+1+1} < \beta & \\ \text{donc } u_{2(n+1)} \in [0;\beta[& \end{aligned}$$

En reprenant ces inégalités

$f(0) \geqslant f(u_{2n+2}) > f(\beta)$ donc $\beta < u_{2n+3} \leqslant 1$

On a donc démontré que $\mathscr{H}(n+1)$ est vraie

Conclusion D'après le principe de récurrence ...

Remarque :

- Dans ce type de raisonnement il ne faut pas hésiter à passer de $x \in [a; b[$ à $a \leqslant x < b$...et inversement.
- On bien montré que $\beta < 1$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_{n+2} = f(\big(f(u_n)\big)$.
- Si $0 < x < \beta$ alors

$$f(0) > f(x) > f(\beta)$$

et par définition $f(\beta) = \beta$, on vient donc de démontrer que

$$\forall x \in \left]0; \beta\right[\qquad f(x) \in \left]\beta; 1\right[$$

et on montre de même que

$$\forall x \in \left]\beta; 0\right[\qquad f(x) \in \left]0; \beta\right[$$

Ce que l'on peut noter par

$$f\left(\left[0; \beta\right[\right) \subset \left]\beta; 1\right] \qquad f\left(\left]\beta; 1\right]\right) \subset \left[0; \beta\right[$$

On a aussi utilisé indirectement

$f([0; 1]) \subset [0; 1]$ $\qquad$ l'intervalle $[0; 1]$ est stable par f

(b) **Idée** on doit connaître le signe de $u_{2n+2} - u_{2n} = f \circ f(u_{2n}) - u_n$

Soit t réel dans $[0; 1]$ on pose

$$\begin{aligned}
h(t) &= f \circ f(t) - t \\
&= 1 - (1 - t^2)^2 = 1 - (1 - 2t^2 + t^4) - t \\
&= 1 - (1 - t^2)^2 \\
&= 1 - (1 - 2t^2 + t^4) - t \\
&= -t^4 + 2t^2 - t \\
&= -t\left(t^3 - 2t + 1\right) \\
&= -t(t-1)\left(t^2 - t - 1\right) && \text{factorisation , 1 racine évidente} \\
&= t(t-1)(f(t) - t)
\end{aligned}$$

Et sur $[0; 1]$ cette quantité est du signe de $f(t) - t$ *i.e.* positif sur $\left[0; \beta\right[$, négatif $\left]\beta; 1\right]$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ comme u_{2n} appartient à $\left[0; \beta\right]$ (question 3)

$$f^2(u_{2n}) \geqslant u_{2n}$$

ce qui démontre

$$u_{2(n+1)} \geqslant u_{2n}$$

La suite (u_{2n}) est croissante.

de même

La suite (u_{2n+1}) est décroissante.

4. La suite (u_{2n}) est croissante (question précédente) et majorée par β, elle converge donc vers un réel dans $\left]0; \beta\right]$
De plus comme $f \circ f$ est continue on obtient comme la question 2 que cette limite vérifie

$$\varphi \circ f(\ell) = \ell \qquad \ell \in \left]0; \beta\right]$$

et la factorisation précédente permet de montrer, $f(\ell) = \ell$ ce qui démontre $\ell = \beta$

$$\lim_{n \to +\infty} u_{2n} = \beta$$

On démontre de même que

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \beta$$

En utilisant le théorème sur les suites extraites,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \beta$$

5. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1}$, on peut alors démontrer que

$$v_0 \in [0; \beta[, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad v_{n+1} = f(v_n)$$

On applique le résultat précédent à (v_n) qui converge vers β et donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \beta$$

*

Exercice 7.
On considére la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et la relation de récurrence : n

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{u_n-1}$$

1. Justifiez que (u_n) est bien définie.
2. Étudiez les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ et le signe de $f(x)-x$.
3. On suppose $a > 1$. Montrez que pour tout entier non nul $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 2(1+\sqrt{2})$. Montrez que la suite est croissante et déterminez sa limite.

Exercice 8.
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -2$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n}{3-u_n}$$

1. Méthode 1
   Utilisation d'une suite auxiliaire :
   Considérons la suite auxiliaire $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$
   (a) Démontrez que v est une suite géométrique.
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   (c) Montrez que u est convergente et précisez sa limite.
2. Méthode 2.
   Utilisation d'une inégalité :
   (a) Montrez que la suite u vérifie
   $$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1}| \leqslant \frac{2}{3}|u_n|$$
   .
   (b) En déduire que u converge et déterminez sa limite.
   (c) Déterminez un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont dans l'intervalle ouvert $]-10^{-2}, 10^{-2}[$.

Exercice 9 (Suite implicite)**.**
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x + tanx = n$ d'inconnue $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n cette équation possède une solution unique notée x_n .
2. En utilisant la croissance stricte de la fonction $x \mapsto x + \tan x$ sur l'intervalle considéré, montrer que la suite et monotone et donner sa monotonie.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

RÉPONSE:

1. La fonction $\varphi : x \mapsto x + \tan x$ est continue et strictement croissante sur $]-\pi/2; \pi/2[$ comme somme de deux fonctions continues et strictement croissantes. De plus

$$\lim_{\substack{x\to -\frac{\pi}{2} \\ x>-\pi/2}} \varphi(x) = +\infty \varphi(x) = -\infty \qquad \lim_{\substack{x\to \frac{\pi}{2} \\ x<\pi/2}} \varphi(x) = +\infty$$

D'après le théorème de la bijection monotone φ induit une bijection de $]-\pi/2; \pi/2[$ vers $]-\infty; +\infty[$. Comme $n$est un réel, il admet un unique antécédent par φ.

Pour tout entier naturel n, l'équation $x + tan x = n$ admet une unique solution dans $]-\pi/2; \pi/2[$.

2. La fonction φ étant strictement croissante, sa bijection réciproque l'est aussi Pour $n \in \mathbb{N}$

$$n < n+1$$

donc

$$\varphi^{-1}(n) < \varphi^{-1}(n+1)$$

donc

$$x_n < x_{n+1}$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

3. Méthode 1 La suite converge car elle est monotone et majorée par $\frac{\pi}{2}$ Notons ℓ cette limite qui appartient à $]\pi/2; -\pi/2]$ Pour $n \in \mathbb{N}$

$$x_n + \tan(x_n) = n$$

Si $\ell \neq \frac{\pi}{2}$ alors en passant à la limite dans l'égalité on obtient

$$\ell + \tan(\ell) = +\infty$$

ce qui est impossible donc

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{\pi}{2}$$

Le tableau de variation de φ et le théorème de la bijection monotone nous permet d'établir le tableau de variations de φ par symétrie

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
φ	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
φ^{-1}	$-\frac{\pi}{2}$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\frac{\pi}{2}$

Comme pour $n \in \mathbb{N}$ $x_n = \varphi^{-1}(n)$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{\pi}{2}$$

*

Séries

Exercice 10 (Calcul de somme ; série de références)**.**
Calculer, si elles convergent, la somme totale des séries suivantes

1. $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{2^n}$
2. $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{3}{7^n}$
3. $\sum_{n\geqslant 0} nq^n$ avec q réel
4. $\sum_{n\geqslant 0} n(n-1)q^n$ avec q réel
5. $\sum_{n\geqslant 0} n^2 q^n$ avec q réel
6. $\sum_{n\geqslant 0} n\dfrac{x^n}{n!}$ avec x réel

RÉPONSE:

1. On reconnaît directement une série dérivée de raison $1/2 \in]-1;1[$ qui est donc convergente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

2. Soit $N \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{3}{7^n} = 3\sum_{n=0}^{N-2} \frac{1}{7^{n+2}} \quad \text{changement d'indice} = \frac{3}{49}\sum_{n=0}^{N-2} \frac{1}{7^n}$$

On reconnaît la somme partielle liée à une série géométrique convergent, donc en faisant tendre N vers $+\infty$, on démontre que la série converge et que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3}{7^n} = \frac{3}{49}\frac{1}{1-\frac{1}{7}} = \frac{1}{14}$$

Remarque : on peut aussi rajouter les termes manquant et "compenser"

3. Soit $N \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{n=0}^{N} nq^n = q\sum_{n=0}^{N} nq^{n-1}$$

On reconnaît la somme partielle d'une série dérivée qui converge si et seulement si $|q < 1$ et dans ce cas en passant à la limite

La série $\sum_{n\geqslant 0} nq^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = \dfrac{q}{(1-q)^2}$

4. Même type de raisonnement que précédemment

La série $\sum_{n\geqslant 0} n(n-1)q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = \dfrac{2q^2}{(1-q)^3}$

5. On commence par constater, que si $q \notin]-1;1[$, alors le terme général de la série ne tend pas vers 0 et don la série diverge grossièrement.
Soit $q \in]-1;1[$ et $N \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} n^2q^n &= \sum_{n=0}^{N} (n(n-1)+n)q^n \\ &= \sum_{n=0}^{N} (n(n-1)q^n + \sum_{n=0}^{N} nq^n \\ &= \sum_{n=2}^{N} (n(n-1)q^n + \sum_{n=1}^{N} nq^n \qquad \text{les termes enlevés sont nuls} \\ &= q^2\sum_{n=2}^{N} (n(n-1)q^{n-2} + q\sum_{n=1}^{N} nq^{n-1}\end{aligned}$$

· On reconnaît les sommes partielles de séries dérivées première et seconde, convergentes
Par somme la série converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2q^n = \frac{2q^2}{(1-q)^3} + \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{1+q^2}{(1-q)^3}$$

6. Soit x un réel et $N \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} n\frac{x^n}{n!} &= \sum_{k=1}^{N} n\frac{x^n}{n!} \qquad \text{le premier terme est nul} \\ &= x\sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= x\sum_{k=0}^{N-1} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{changement d'indice}\end{aligned}$$

*

Exercice 12 (Calcul de sommes, télescopage)**.**
Calculer la somme des séries suivantes.

1. $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$
2. $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2-1}$.
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(\frac{1+n}{n-1}\right)$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \tfrac{1}{\sqrt{n-1}}+\tfrac{1}{\sqrt{n+1}}-\tfrac{2}{\sqrt{n}}$

Dans chacun des cas écrire une fonction python `sommeapartielle(n)` qui calcule la somme partielle de rang n.

Exercice 13 (Plus dur)**.**
Calculer la somme des séries suivantes.

1. $u_n = \dfrac{1}{(3n+1)(3n+4)} \quad (n \geqslant 0)$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)$

Exercice 14 (Convergence absolue)**.**
Les séries suivantes sont-elles absolument convergentes?

1. $\sum \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$
2. $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{(3n-1)}$
3. $1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{7}}+\dots$
4. $\dfrac{1}{8}-\dfrac{2}{12}+\dfrac{3}{16}-\dfrac{4}{20}+\dots$

On reconnaît la somme partielle d'une série exponentielle convergente, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{x^n}{n!} = x\mathrm{e}^x$$

*

Exercice 11 (Théorème de comparaison)**.**
Les séries suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\sum \dfrac{n}{n^3+n^2+1}$
2. $\sum \dfrac{1}{n-1}$
3. $\sum \dfrac{1}{n!+n^2}$
4. $\sum \dfrac{\mathrm{e}^n}{n^{100}}$
5. $\sum \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln n}}$

RÉPONSE:

Toutes les séries étudiées dans cet exercice sont à termes positifs

1. $\dfrac{n}{n^3+n^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n}{n^3} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ et la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de référence convergente. En utilisant le théorème de comparaisons sur les séries à termes positifs

$$\text{La série } \sum \frac{n}{n^3+n^2+1} \text{ converge.}$$

2. $\dfrac{1}{n-1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ et la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est une série de référence divergente. En utilisant le théorème de comparaisons sur les séries à termes positifs

$$\text{La série } \sum \frac{1}{n-1} \text{ diverge.}$$

5. $\sum \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$
6. $\sum \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$

Exercice 15 (Convergence absolue)**.**
Les séries suivantes sont-elles absolument convergentes ?

1. $\sum \left(\dfrac{1}{n}-1\right)^n$
2. $\sum \left(\dfrac{1-n}{1+n}\right)^n$
3. $\sum \dfrac{(-1)^n}{\ln n+(-1)^n}$
4. $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$
5. $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$
6. $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^{1/n}}$
7. $\sum (-1)^n \dfrac{2^n}{n^2}$
8. $\sum \dfrac{(-1)^n n}{\mathrm{e}^n}$
9. $\sum \dfrac{\sin(n)}{n^2}$
10. $\sum \dfrac{\cos(n)}{n^2-1}$
11. $\sum \dfrac{(-1)^n}{n!}$

Exercice 16.
Calculer la somme des séries dont le terme général est

1. $\dfrac{n^2-n}{(n+3)!}$
2. $\dfrac{(n+2)(n+1)}{2^{n+3}}$

Problèmes

Suites définies par récurrence

Exercice 17.
On considère la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$ et $u_0 \geqslant 0$.

1. Étudier f et le signe de $f(x)-x$. Quelles sont les limites possible de (u_n) ?
2. On suppose $u_0 \in [0; 1/4]$. Montrer que pour tout $u_n \in [0; 1/4]$ puis que (u_n) est croissante.
3. Quelle est la nature de (u_n) (si elle est convergente, préciser sa limite) ?
4. On suppose $u_0 \in [1/4; 3/4]$. Montrer que (u_n) est décroissante et minorée. Quelle est la nature de (u_n) (si elle est convergente, préciser sa limite) ?
5. On suppose $u_0 > 3/4$. Montrer que (u_n) est croissante. Quelle est la nature de (u_n) (si elle est convergente, préciser sa limite) ?

Exercice 18 (Suite récurrente et fonction logarithme)**.**
On note f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 + \ln x$. Soit u la suite définie par son premier terme $u_0 \geqslant 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer que la suite est bien définie et qu'elle est minorée par 1.
2. Étudier le signe de $f(x)-x$ sur $[1; +\infty[$.
3. Étudier la monotonie de u.
4. En déduire que (u_n) est convergente, et donner sa limite.

Exercice 19.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$

1. (a) Montrer que f est paire.
   Etudier les variations de f e
   (b) Montrer qu'il existe un unique réel ℓ tel que $f(\ell) = \ell$.
   Justifier : $0 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{2}$ (on donne $f(1/2) < 1/2$)
   (c) Montrer que pour tout réel x : $|f'(x)| \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$
2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$u_0 = 0 \qquad \text{et } \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n \in [0, \dfrac{1}{2}]$
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell| \qquad \text{puis} \qquad |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$$
   (c) En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ.
   (d) Ecrire un programme python permettant d'obtenir une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

Exercice 20.
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -2$ et la relation de récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n}{3-u_n}$$

1. Écrire une fonction `function y=suite(n)` qui calcule le terme n de cette suite.
2. Méthode 1
   Utilisation d'une suite auxiliaire :
   Considérons la suite auxiliaire $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$
   (a) Démontrez que v est une suite géométrique.
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   (c) Montrez que u est convergente et précisez sa limite.
3. Méthode 2.
   Utilisation d'une inégalité :

(a) Montrez que la suite u vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1}| \leqslant \frac{2}{3}|u_n|$$

.

(b) En déduire que u converge et déterminez sa limite.

(c) Déterminez un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont dans l'intervalle ouvert $]-10^{-2}, 10^{-2}[$.

Exercice 21 (Suite définie par récurrence et série!)**.**
Soit u la suite définie par

$$u_0 \in]0;1[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Montrer que pour tout entier n on a $u_n \in]0;1[$.
2. Montrer que la suite u est décroissante et étudier sa limite.
3. Montrer que la série $\sum u_n^2$ est convergente et calculer sa somme.
4. En calculant les sommes partielles, montrer que la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.
5. Trouver un équivalent de $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et en déduire que la nature de la série $\sum u_n$.

Exemples de suites définies implicitement

Exercice 22.
Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) = x - n.\ln(x)$.

1. (a) Etudier cette fonction et dresser son tableau de variations.

   (b) En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux réels $u_n$et $v_n$solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiants $0 < u_n < n < v_n$.

2. Etude de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$.

   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 3, 1 < u_n < e$.

   (b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que (u_n) est décroissante.

   (c) En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 3}$ converge et montrer, en encadrant $\ln(u_n)$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

   (d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$; en déduire que $u_n - 1 \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 23.
Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} + n\,x$.

1. (a) Déterminer, pour tout réel x, $f_n'(x)$ et $f''(x)$.

   (b) En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n.

   (b) Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \frac{-1}{n} < u_n < 0$.

   (c) En déduire la limite de la suite (u_n)

   (d) En revenant à la définition de u_n, montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2n}$.

<u>RÉPONSE:</u>

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Comme pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$ comme quotient défini de fonction de classe $\mathscr{C}^{+\infty}$ et pour x réel

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \frac{-\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} + n \\ f_n''(x) &= -\frac{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)^2 - 2\mathrm{e}^x\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^x)^4} + 0 \\ &= -\frac{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x) - 2\mathrm{e}^x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^3} \\ &= -\frac{\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^x)}{(1+\mathrm{e}^x)^3} \end{aligned}$$

(b) On obtient

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe $f_n''(x)$		$-$	0	$+$	
var f_n'		↘	$n - \frac{1}{4}$	↗	
signe $f_n'(x)$		$+$		$+$	
var f_n	$-\infty$		↗		$+\infty$

Aucune des limite indiquée n'est une forme indéterminée.

2. (a) La fonction f_n est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty;+\infty[$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]\lim_{-\infty} f_n; \lim_{+\infty} f_n[= \mathbb{R}$.

L'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on constate que $f_n(0) = \frac{1}{2} > 0$ et que $f_n\left(-\frac{1}{n}\right) = -1 + \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-1/n}}$ Comme un exponentielle est toujours positive,

$$f_n\left(-\frac{1}{n}\right) < 0 < f_n(0)$$

donc

$$f_n\left(-\frac{1}{n}\right) < f_n(u_n) < f_n(0)$$

et comme f_n est (strictement) croissante

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*,\ -\frac{1}{n} < u_n < 0$$

(c) En utilisant le théorème des gendarmes

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, par définition

$$f_n(u_n) = 0$$

donc

$$u_n = -\frac{1}{n(1+\mathrm{e}^{u_n})}$$

En utilisant la limite précédente

$$1 + \mathrm{e}^{u_n} \underset{+\infty}{\sim} 2$$

donc par opérations

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$$

*

Exercice 24 (Sans indication!).
Soit $n \in \mathbb{N}$, Montrer que l'équation $xe^x = n$ possède dans $\mathbb{R}_+$, une unique solution x_n . Étudier la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Autres

Exercice 25.
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1+\sqrt{\cdots + \sqrt{2+\sqrt{1}}}}}$$

1. Écrire une fonction `suite(n)` qui calcule le terme n de cette suite.
2. Montrer que $\lim u_n = +\infty$
3. Trouver une relation simple entre u_n et u_{n+1}.
4. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant n$ et que $u_n = o(n)$
5. Trouver un équivalent simple de (u_n).
6. Trouver la limite de $u_n - \sqrt{n}$

RÉPONSE:

1.
```python
from math import sqrt
def suite(n):
        u=1
        for i in range(2,n+1):
                u=sqrt(i+u)
        return u
```
2. On constate que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \sqrt{u_{n-1} + n}$$

On montre par récurrence que pour tout n, u_n est défini et positif. On en déduit que

$$\forall n_i n \mathbb{N}^* \qquad u_n \geqslant \sqrt{n}$$

En utilisant le théorème des encadrements

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

3. On a pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \sqrt{n+1+u_n}$$

4. **Initialisation** On a $u_1 = 1$, donc $u_1 \leqslant 1$.
Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que

$$u_n \leqslant n$$

alors

$$u_{n+1} \leqslant \sqrt{n+1+n}$$

On montre alors que

$$2n+1 \leqslant (n+1)^2$$

donc

$$\sqrt{2n+1} \leqslant (n+1)$$

ce qui démontre

$$u_{n+1} \leqslant n+1$$

Conclusion D'après le principe de récurrence ...
On a en utilisant cette inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 0 \leqslant \frac{u_n}{n^2} \leqslant \frac{1}{n}$$

et donc en utilisant le théorème des gendarmes

$$\lim_{+\infty} \frac{u_n}{n^2} = 0$$

donc En reprenant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{u_n}{n} = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{u_{n-1}}{n^2}}$$

Donc

$$\lim_{+\infty} \frac{u_n}{n} = 0$$

$$u_n =_{n \to +\infty} o(n)$$

5. En reprenant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{u_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}}$$

Donc en utilisant le résultat précédent

$$\lim_{+\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}} = 1$$

$$u_n \sim \sqrt{n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_n - \sqrt{n} &= \sqrt{n + u_{n-1}} - \sqrt{n} \\ &= \frac{u_{n-1}}{\sqrt{n} + \sqrt{u_n + n}} \text{quantité conjuguée} \\ &= \frac{\frac{u_{n-1}}{\sqrt{n}}}{1 + \sqrt{\frac{u_n}{n} + 1}} \end{aligned}$$

En utilisant tout les résultats précédents

$$\lim_{+\infty} \frac{u_{n-1}}{\sqrt{n}} = 1 \qquad \lim_{+\infty} \frac{u_n}{n} = 0$$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} u_n - \sqrt{n} = \frac{1}{2}$$

*

Exercice 26.
On pose pour n entier strictement plus grand que 1

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{k}$$

1. Montrer que $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes.
2. En déduire la convergence de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. La série converge-t'elle absolument ?

Résultats hors programme

Exercice 27 (Série de Rieman)**.**
Les séries de Riemann sont les séries de la forme $\sum \frac{1}{n\alpha}$ où α est une constante. Les cas vus en cours sont $\sum \frac{1}{n}$ où α vaut 1 et $\sum \frac{1}{n^2}$ où $\alpha vaut 2$

1. $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ est elle une série de Riemann ?
2. $\sum \sqrt{n}$ est elle une série de Riemann ?
3. $\sum \frac{1}{n^n}$ est elle une série de Riemann ?
4. On veut démontrer la proposition suivante « La série $\sum \frac{1}{n\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
   (a) Montrer que si $\alpha \leqslant 0$ alors la série diverge.
   (b) En s'inspirant de la démonstration vu en cours pour les cas $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$ démontrer les autres cas

Exercice 28 (comparaison cas = $o()$)**.**
Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que (v_n) ne s'annulle pas à partir d'un certain rang. On dit (u_n) est négligeable devant (v_n) au voisinage de l'infini si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

On veut démontrer le résultat suivant
« Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries **à termes positifs** et telles que :

$$u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$$

- Si de plus la série $\sum v_n$ est convergente alors la série $\sum u_n$ est convergente.
- Si de plus la série $\sum u_n$ est divergente alors la série $\sum u_n$ est divergente .

»
On suppose que $u_n = o(v_n)$ au voisinage de $+\infty$

1. Démontrer qu'il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $n \geqslant n_0$ alors $u_n \leqslant v_n$.
2. Conclure.

Exercice 29 (Une série exponentielle)**.**
On rappelle que $0! = 1$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,\mathrm{d}x$$

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.
2. (a) Montrer que pour tout naturel n, $\dfrac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.
   (b) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. (a) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, u_n en fonction de u_{n-1} et de n.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n :
$$u_n = n!\left(\mathrm{e} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$$
4. Des questions précédentes, déduire la limite de $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 30 (Critère de d'Alembert)**.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une série à termes strictement positifs, on suppose de plus que

$$\lim_{+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda \in \mathbb{R}$$

1. On suppose dans cette question que $\lambda \in [0;1[$, et on note $\mu = \dfrac{\lambda+1}{2}$
   (a) Montrer que $\lambda < \mu < 1$
   (b) Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0
$$u_{n+1} \leqslant \mu u_n$$
   (c) En déduire que pour tout entier n plus grand que n_0
$$u_n \leqslant \mu^{n-n_0} u_{n_0}$$
   (d) En déduire que la série $\sum u_n$ converge
2. On suppose maintenant que $\lambda > 0$
   (a) Montrer qu'il existe un réel μ et un entier naturel n_0 tel que pour tout entier plus grand que n_0
$$u_n \geqslant \mu^{n-n_0} u_{n_0}$$
   (b) En déduire la nature de $\sum u_n$
3. En utilisant les résultats précédent étudier la nature des séries de terme général $\dfrac{x^n}{n!}$ et $\dfrac{n^n}{n!}$