PRÉPARATIONS AUX ÉPREUVES ORALES

Table des matières

Sujet 1 : Agro 2024

Question de cours

Si f est un fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ les fonctions partielles sont les fonctions

$$\bullet \mapsto f(x,\bullet) \qquad \bullet \mapsto f(\bullet, y)$$

définies sur $\mathbb{R}$, et où x et y sont des constantes réelles.

Exercice préparé

On rappelle que si S et T sont deux variables aléatoires réelles de densités respectives f_S et f_T et indépendantes, alors $S+T$ est une variable aléatoire à densité dont une densité est donnée par la formule de convolution :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{S+T}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_S(s) f_T(t-s)\,\mathrm{d}s. \tag{E}$$

1. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0;1[$ et λ un réel strictement positif.
   On note $X = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$. Vérifier que X suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

RÉPONSE:

On commence par constater que si $x \in]0;1[$ alors $1-x \in]0;1[$ et donc comme $\lambda > 0$, $X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-x) \in \mathbb{R}_+^*$
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leqslant x) &= \mathbb{P}\left(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leqslant x\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\ln(1-U) \geqslant -\lambda x\right) && \lambda > 0 \\
&= \mathbb{P}\big(1-U \geqslant \exp(-\lambda x)\big) && \text{exp croissante} \\
&= \mathbb{P}\big(1-\exp(-\lambda x) \geqslant U\big) \\
&= \mathbb{P}\big(1-\exp(-\lambda x) \geqslant U\big) \\
&= \mathbb{P}\big(U \leqslant 1-\exp(-\lambda x)\big) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } 1-\exp(-\lambda x) \leqslant 0 \\ 1-\exp(-\lambda x) & \text{si } 0 < 1-\exp(-\lambda x) < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leqslant 1-\exp(-\lambda x) \end{cases} && \text{fonction de répartition de } U \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x \\ 1-\exp(-\lambda x) & \text{si } 0 < x \end{cases} && \text{car } \lambda > 0 \text{ et exp croissante}
\end{aligned}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle.

$$\boxed{U \text{ a pour loi } \mathscr{E}(\lambda)}$$

Remarque : On aurait pu poser $X = -\frac{1}{\lambda}\ln(U)$ qui suit la même loi, mais `rd.random` simule une variable aléatoire sur $[0;1[$ et cela pourrait poser un problème de définition du logarithme

❀

2. Écrire un programme Python qui simule une loi exponentielle.

RÉPONSE:

```
import random as rd
import math as m

def expo(lambda_):
        return -m.log(1-rd.random())/lambda_
```

❀

En dehors de la syntaxe il est difficile de tester en temps limité si le programme renvoie bien les résultats attendus, on peut faire tracer un histogramme de densité comme en TP d'informatique.

3. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, de même loi que X.
   On définit la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $S_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
   (a) À l'aide d'une récurrence, montrer que la fonction f_n définie ensuite est une densité de probabilité.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

RÉPONSE:

Initialisation Pour $n = 1$

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

On reconnaît la densité d'une loi exponentielle.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que f_n est une densité de probabilité.
La fonction f_{n+1} est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.
Sous réserve de convergence

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} f_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{(n)!}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{-\lambda}\frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{(n)!}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{-\lambda}\lambda n \lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n)!}\,\mathrm{d}t & \text{IPP} \\
&= \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 1 & \text{HR}
\end{aligned}$$

L'intégration par parties est valide car les fonctions manipulées sont de classe $\mathscr{C}^2$ et que les crochets convergent vers 0 (croissances comparées) et l'intégrale converge (HR)

Conclusion D'après le principe de récurrence

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n\in\mathbb{N}^*,\ f_n \text{ est une densité.}}$$

❀

(b) En utilisant la formule de convolution (E) et une récurrence, montrer que f_n est une densité de S_n pour tout $n \geqslant 1$.

RÉPONSE:

Initialisation Pour $n=1$ S_1 suit la loi exponentielle de paramètre λ

Hérédité Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on suppose que f_n est une densité de S_n, et on constate que $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ et donc une densité de S_{n+1} est donnée par $f_n \star f_1$. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$f_n \star f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) f_1(x-t)\,\mathrm{d}t$$

La seule partie de l'intégrale "à garder" est celle pour $t \geqslant 0$ et $(x-t) \geqslant 0$. Si x est négatif l'intégrale est donc nulle, Si x est positif

$$\begin{aligned}
f_n \star f_1(x) &= \int_0^x f_n(t) f_1(x-t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\lambda e^{-\lambda(x-t)}(\lambda(x-t))^0}{(0)!}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda(x-t)}\,\mathrm{d}t && \text{simplification} \\
&= \frac{\lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda x}}{(n-1)!} \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1} \lambda e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t && \text{factorisation} \\
&= \frac{\lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda x}}{(n-1)!} \int_0^x (\lambda t)^{n-1}\,\mathrm{d}t && \text{simplification} \\
&= \frac{\lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda x}}{(n-1)!} \left[\frac{(\lambda t)^n}{\lambda n}\right]_0^x \mathrm{d}t && \text{Intégration} \\
&= \frac{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}}{n!} (\lambda t)^n \\
&= f_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

Conclusion D'après le principe de récurrence

$$\boxed{f_n \text{ est une densité de } S_n \text{ pour tout } n \geqslant 1.}$$

❀

4. On suppose qu'à un arrêt, les différences entre les horaires de passage successifs d'un bus sont indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ. On définit un instant $S_0 = 0$, puis on note S_1, S_2, etc les horaires de passage successifs des bus. On note alors, pour $t > 0, N_t$ le nombre de bus passés à l'arrêt, entre l'instant 0 et l'instant t. Autrement dit : $\forall n \geqslant 0, [N_t = n] = [S_n \leqslant t < S_{n+1}]$.

   (a) Pour $n \geqslant 0$, exprimer (avec soin) l'événement $[N_t \geqslant n]$ à l'aide de S_n.

RÉPONSE:

$$\boxed{[N_t \geqslant n] = [S_n \leqslant t].}$$

❀

(b) Justifier alors que : $\forall n \geqslant 0, \mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(S_n \leqslant t) - \mathbb{P}(S_{n+1} \leqslant t)$.

RÉPONSE:

C'est une conséquence directe de $[N_t = n] = [S_n \leqslant t < S_{n+1}]$ donné dans l'énoncé, je ne comprends pas la progression de l'énoncé, je pense que cette indication a été rajoutée.

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(S_n \leqslant t) - \mathbb{P}(S_{n+1} \leqslant t).}$$

❀

(c) En déduire que N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt.

RÉPONSE:

Soit $n \geqslant 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_t = n) &= \mathbb{P}(S_n \leqslant t) - \mathbb{P}(S_{n+1} \leqslant t) \\
&= \int_0^t f_n(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^t f_{n+1}(u)\,\mathrm{d}u && \text{densité de } S_n \text{ et } S_{n+1} \\
&= \int_0^t f_n(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda u} \frac{(u\lambda)^n}{n!}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^t f_n(u)\,\mathrm{d}u + \left[\mathrm{e}^{-\lambda u} \frac{(u\lambda)^n}{n!}\right]_0^t - \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda u} \frac{n\lambda(\lambda u)^{n-1}}{n!}\,\mathrm{d}u && \text{IPP, signes !} \\
&= \int_0^t f_n(u)\,\mathrm{d}u + \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{(t\lambda)^n}{n!} - \int_0^t f_n(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{(t\lambda)^n}{n!}
\end{aligned}$$

$$\boxed{N_t \text{ suit la loi de Poisson de paramètre } \lambda t.}$$

❀

5. On suppose plus précisément que les horaires de passages successifs d'un bus sont, en moyenne, de 10 minutes. Un individu arrive à l'arrêt à l'instant $T = 100$ min pour prendre le bus.
On se pose alors les deux questions suivantes :

   - Combien de temps en moyenne va-t-il attendre le prochain bus ?
   - Combien de temps en moyenne s'écoule-t-il entre le prochain bus et le bus qui a précédé ?

   Pour y répondre, on réalise le programme Python suivant :

```
import math as m
import random as rd
def autobus():
    a, b, N = 0, 0, 10000
    for k in range(N):
        s = 0
```

```
        while s < 100:
            r = s
            s = s - 10*m.log(1-rd.random())
        u, v = s - 100, s-r
        a, b = a + u, b + v
    return a / N, b / N
```

(a) Expliquer ce que représentent les variables r, s, u et v dans le programme.

RÉPONSE:

- `- 10*m.log(1-rd.random())` simule une loi exponentielle d'espérance 10.
- donc `s=0` et `s = s - 10*m.log(1-rd.random())` permet de simuler S_n (n n'est pas une variable utilisée)
- `while s < 100:` on arrête la boucle après le passage du premier bus après $T = 100$.
- `u=s-100`, durée d'attente du passager puisque s représente le temps de passage du bus qu'il va prendre.
- `r=s` en début de boucle permet de garder en mémoire le temps de passage du bus précédent, donc `v=s-r` permet de calculer la durée entre le passage du bus précédent et celui du bus que le passager prend.
- `a, b = a + u, b + v` et `a / N, b / N` permet de calculer les moyennes des variables u et v

❀

(b) Le programme affiche les valeurs suivantes : 10.062252   20.315494 Pourquoi les valeurs affichées sont-elles paradoxales vis à vis de la situation ?

RÉPONSE:

❀

Sujet 2 : Agro 2024

Question de cours

Donner la définition d'un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E.

RÉPONSE:

Si $F \subset E$ est tel que

- $E \neq \emptyset$
- Pour tout $u \in F$ pour tout $v \in F$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) $u + \lambda v \in F$.

On dit alors que F est un sous-espace vectoriel de E.

❀

Exercice préparé

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit qu'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est adaptée à f si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n f(nx) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right) \tag{*}$$

On admet que si une fonction non identiquement nulle f possède une suite adaptée, alors cette suite est unique. On note E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ possédant une suite adaptée.

1. Montrer que la suite constante égale à 1 est adaptée à la fonction $x \mapsto x - \frac{1}{2}$.

RÉPONSE:

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x+\frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(x+\frac{k}{n}-\frac{1}{2}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} x + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\\
&= nx + \frac{n(n-1)}{2n} - \frac{n}{2}\\
&= nx + \frac{n-1}{2} - \frac{n}{2}\\
&= 1\left(nx - \frac{1}{2}\right)\\
&= 1 f(nx)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La suite constante égale à 1 est adaptée à la fonction } x \mapsto x - \tfrac{1}{2}.}$$

❀

2. Montrer que si f est une fonction dérivable admettant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ comme suite adaptée, alors la suite $(nu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est adaptée à la fonction f'.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, si on suppose f dérivable, alors par somme et composées la fonction $x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x+\frac{k}{n}\right)$ est dérivable de dérivée $x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} 1 f'\left(x+\frac{k}{n}\right)$
La fonction $x \mapsto u_n f(nu_n)$ est dérivable de dérivée $x \mapsto nu_n f'(nx)$ on a donc montré que

$$\forall n \in N^*,\ \forall x \in \mathbb{R} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} 1 f'\left(x+\frac{k}{n}\right) = nu_n f'(nx)$$

$$\boxed{\text{Dans ce cas la suite } (nu_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est adaptée à la fonction } f'}$$

❀

3. On admet dans la suite que l'on peut définir une suite de polynômes $\left(B_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ \forall p \in \mathbb{N}^*, B_p' = pB_{p-1} \text{ et } \displaystyle\int_0^1 B_p(t)\,\mathrm{d}t = 0 \end{cases}$$

L'objectif est alors de montrer que pour tout entier naturel p, B_p appartient à E.

4. Écrire une fonction Python qui prend en argument une liste de réels $L = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ et renvoie la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \,\mathrm{d}x$.

RÉPONSE:

On commence par calculer

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \,\mathrm{d}x = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}$$

```python
def integre(L):
        S=0
        for i in range(len(L)):
                S+=L[i]/(i+1)
        return S
```

❀

5. Calculer B_1 et B_2 et vérifier que B_0 et B_1 appartiennent à E.

RÉPONSE:

On a

$$B_1' = 1$$

donc il existe une constante α telle que

$$B_1 = x + \alpha$$

donc

$$\int_0^1 B_1(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \frac{1}{2} + \alpha = 1$$

$$\boxed{B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \text{ qui appartient à } E}$$

Comme B_1 appartient à E sa dérivée aussi

$$\boxed{B_0(x) \text{ appartient à } E}$$

$$B_2' = 2(x - \frac{1}{2})$$

Donc il existe une constante réelle β telle que

$$B_2(x) = x^2 - 1 + \beta$$

On peut alors utiliser la fonction précédente `integre([0,-1,1])` renvoie comme valeur -0.16666666666666669

$$\boxed{B_1(x) = x^2 - x - \frac{1}{6}}$$

❀

6. Déterminer, pour tout entier naturel p, le degré et le coefficient dominant de B_p.

RÉPONSE:

On pose pour $n \in \mathbb{N}$

$$\mathscr{H}_n \ : \ B_n \text{ est de degré } n \text{ et de coefficient dominant } 1$$

Initialisation Vraie au rang 0

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $\mathscr{H}_n$, alors $B_n = x^n + P_n$ où P_n est un polynôme de degré strictement inférieur à n. Donc

$$B'_{n+1}(x) = (n+1)x^n + (n+1)P_n$$

et en intégrant

$$B_{n+1}(x) = x^{n+1} + P_{n+1}$$

où P_{n+1} est un polynôme de degré au plus n

Conclusion D'après le principe de récurrence

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}, B_n \text{ est un polynôme de degré } n \text{ et de coefficient dominant } 1.}$$

❀

7. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que B_{p-1} appartient à E et on cherche à montrer que B_p appartient aussi à E.

   (a) Montrer que si B_p appartient à E, alors la suite $\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right)_{n \in N^*}$ est adaptée à B_p.

RÉPONSE:

Supposons que $B_p \in E$ alors il existe une suite (u_n) adaptée. D'après la question 2 la suite (nu_n) est une suite adaptée à pB_{p-1}, et il est facile de voir que c'est aussi une suite adaptée à B_{p-1} et d'après ce qui est admis dans l'énoncé c'est l'unique suite adaptée à B_{p-1} On peut recommencer (n^2u_n) est LA suite adaptée à B_{p-2}, (n^3u_n) est LA suite adaptée à B_{p-3}, ..., (n^pu_n) est LA suite adaptée à $B_{p-(p-1)} = B_1$ or la suite adaptée à B_1 est la suite constante égale à 1

$$\boxed{\text{Si elle existe l'unique suite adaptée à } B_p \text{ est } \left(\tfrac{1}{n^{p-1}}\right)_{n \in N^*}.}$$

❀

   (b) Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{n^{p-1}} B_p(nx) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} B_p\left(x + \frac{k}{n}\right)$ est constante.

RÉPONSE:

Cette fonction est dérivable car B_p l'est, puis opérations. Pour $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \frac{n}{n^{p-1}}(B_p)'(nx) - \sum_{k=0}^{n-1}(B_p)'\left(x+\frac{k}{n}\right) && \text{dérivée somme et composée}\\
&= \frac{1}{n^{p-2}}pB_p(nx) - \sum_{k=0}^{n-1} pB_{p-1}\left(x+\frac{k}{n}\right) && \text{définition de } B_p\\
&= p\left(\frac{1}{n^{p-2}}B_p(nx) - \sum_{k=0}^{n-1} B_{p-1}\left(x+\frac{k}{n}\right)\right)\\
&= 0 && \text{car } \left(\frac{1}{n^{p-1}}\right)_{n\in N^*} \text{ est adaptée à } B_{p-1}
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle.

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est constante.}}$$

❀

(c) Calculer $\displaystyle\int_0^{1/n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$.

RÉPONSE:

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{1/n}\left(\frac{1}{n^{p-1}}B_p(nx) - \sum_{k=0}^{n-1} B_p\left(x+\frac{k}{n}\right)\right)\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{1/n} \frac{1}{n^{p-1}}B_p(nx)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{1/n} B_p\left(x+\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{n^p}\int_0^{1/n} B_p(u)\,\mathrm{d}u - \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{1/n} B_p\left(x+\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}x && \text{chg var}\\
&= 0 - \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{1/n} B_p\left(x+\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}x && \text{définition de } B_p\\
&= 0 - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{k+1/n} B_p(x)\,\mathrm{d}x && \text{chg de var}\\
&= 0 - \int_0^n B_p(x)\,\mathrm{d}x && \text{Relation de Chasles}\\
&= 0 - 0 && \text{définition de } B_p
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{1/n} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0}$$

❀

(d) Conclure.

RÉPONSE:

Comme φ est une fonction constante d'intégrale nulle, elle est nulle

$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ réel } \frac{1}{n^{p-1}}B_p(nx) = \sum_{k=0}^{n-1} B_p\left(x+\frac{k}{n}\right).}$$

ce qui démontre que la suite $\left(\frac{1}{n^{p-1}}\right)_{n\in N^*}$. est adaptée à B_p

❀

SUJET 3 : AGRO 2024

Question de cours

Donner la définition d'une densité de probabilité.

RÉPONSE:

Une fonction f $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une densité de X si et seulement si elle vérifie

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ si } a \leqslant b \text{ alors } \mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

ou bien

f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut être considérée comme une densité de probabilité si et seulement si elle est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nmbre fini de points, positive et $\int_{\mathbb{R}} f = 1$

❀

Exercice préparé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$, de son produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de sa norme usuelle notée $\| \cdot \|$.
Soit $p \in [\![1, n]\!]$. Pour toute famille $(u_1, \dots, u_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on définit G la matrice de Gram de $(u_1, \dots, u_p)$ par

$$G = \begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \langle u_1, u_2 \rangle & \cdots & \langle u_1, u_p \rangle \\ \langle u_2, u_1 \rangle & \langle u_2, u_2 \rangle & \cdots & \langle u_2, u_p \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_p, u_1 \rangle & \langle u_p, u_2 \rangle & \cdots & \langle u_p, u_p \rangle \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$$

1. (a) Écrire une fonction Python ps prenant en argument deux vecteurs u et v sous formes de liste de même taille et renvoyant le produit scalaire $\langle u, v \rangle$.

RÉPONSE:

```
def ps(U,V):
        S=0
        for i in range(len(U)):
                S+=U[i]*V[i]
        return S
```

❀

(b) Écrire une fonction Python `Gram` prenant en argument une famille de vecteurs ($u_1, \dots, u_p$) sous forme d'une liste de listes et renvoyant la matrice de Gram de la famille $(u_1, \dots, u_p)$.

RÉPONSE:

```
import numpy as np
def Gram(L):
        n=len(L)
        G=np.zeros([n,n])
        for i in range(n):
                for j in range(n):
                        G[i][j]=ps(L[i],L[j])
        return G

print(Gram([[1,-1,0],[1,0,-1],[1,1,1]]))
```

On obtient

```
[[2. 1. 0.]
[1. 2. 0.]
[0. 0. 3.]]
```

❀

(c) Tester votre fonction avec les vecteurs $u_1 = (1,-1,0)$, $u_2 = (1,0,-1)$ et $u_3 = (1,1,1)$.

2. Justifier que la matrice de Gram d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est diagonalisable.

RÉPONSE:

Le produit scalaire est symétrique

$$\forall i \in [\![1,\, p]\!], \forall j \in [\![1,\, p]\!] \qquad \langle u_i,\ u_j\rangle = \langle u_j,\ u_i\rangle$$

La matrice est donc symétrique à coefficients réels, en utilisant le théorème spectral

$$\boxed{\text{La matrice de Gram d'une famille de vecteurs de } \mathbb{R}^n \text{ est diagonalisable.}}$$

❀

3. Soit $(u_1,\ldots,u_p)$ une famille de $\mathbb{R}^n$ et G sa matrice de Gram. On cherche à montrer que la famille est libre si et seulement si G est inversible.

(a) On suppose que G est inversible. Soient $\alpha_1,\ldots,\alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_k = 0$. On pose $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Montrer que $GX = 0$, puis en déduire que $(\ u_1,\ldots,u_p\ )$ est libre.

RÉPONSE:

A la ligne i de GX

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \langle u_i,\ u_j\rangle = \langle u_i,\ \sum_{j=1}^{p} \alpha_j u_j\rangle = 0$$

$$\boxed{GX = 0}$$

Comme G est inversible, $X = 0$ ce qui démontre

$$\boxed{\text{La famille } (u_i)_{i\in[\![1,p]\!]} \text{ est libre.}}$$

❀

(b) On suppose que $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre.

Soit $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $GX = 0$.

i. Montrer que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\langle u_i, \sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_k \rangle = 0$.

RÉPONSE:

On étudie la ligne i

❀

ii. En déduire que $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_k = 0$.

RÉPONSE:

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_k \left\langle u_i, \sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_k \right\rangle = \sum_{i=1}^{p} \alpha_k 0 = 0$$

donc par linéarité (attention aux indices des Σ)

$$\langle \sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_k, \ \sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_k \rangle = 0$$

donc

$$\left\| \sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_k \right\|^2 = 0$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_k = 0.}$$

❀

iii. Montrer que $X = 0$, puis que G est inversible.

RÉPONSE:

Donc le seul vecteur du noyau de G est 0 donc comme la matrice est carrée

$$\boxed{G \text{ est inversible}}$$

❀

4. Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad \|v_i\| = 1 \quad \text{et} \quad \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, i \neq j \Rightarrow \left\|v_i - v_j\right\| = 1.$$

(a) Pour tous a et $b \in \mathbb{R}^n$, montrer que $\|a-b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\langle a, b\rangle$.

RÉPONSE:

$$\begin{aligned}
\|a-b\|^2 &= \langle a-b,\ a-b\rangle \\
&= \langle a,\ a-b\rangle - \langle b,\ a-b\rangle && \text{linéarité du ps} \\
&= \langle a,\ a\rangle - \langle a,\ b\rangle - \langle b,\ a\rangle + \langle b,\ b\rangle && \text{linéarité du ps} \\
&= \|a\|^2 + \|b\|^2 - \langle a,\ b\rangle && \text{symétrie du ps}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tous } a \text{ et } b \in \mathbb{R}^n,\ \|a-b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\langle a, b\rangle.}$$

❀

(b) En déduire la matrice de Gram de la famille $(v_1, \dots, v_n)$, que l'on notera G.

RÉPONSE:

D'après la question précédente et si $i \neq j$

$$\langle u_i,\ u_j\rangle = \frac{1}{2}\left(\|u_i\|^2 + \|u_j\|^2 - \|u_i - u_j\|^2\right) = \frac{1}{2}(1+1-1)$$

Si $i = j$

$$\|u_i\|^2 = 1$$

$$\boxed{G \text{ est la matrice dont la diagonale est composée de } 1 \text{ et les autres coefficients } 1/2.}$$

❀

(c) On pose $A = 2G$. Exprimer A^2 en fonction de n, A et I_n (la matrice identité de taille n).
En déduire que A est inversible.

RÉPONSE:

On pose J la matrice carrée de taille n qui ne contient que des 1, un calcul rapide sans récurrence démontre que $J^2 = nJ$

$$A = I + J$$

$$\begin{aligned}
A^2 &= (I+J)^2 \\
&= I^2 + 2IJ + J^2 1 && \text{les matrices commutent} \\
&= I + 2J + nJ && \text{calculs précédents} \\
&= I + (n+2)J \\
&= I + (n+2)(A - I) \\
&= (n+2)A - (n+1)I
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$A(A-(n+2)I) = -(n+1)I$$

Ce qui démontre que A est inversible et que

$$A^{-1} = \frac{n+2}{n+1}I - \frac{1}{n+1}A$$

$$\boxed{A^2 = (n+2)A-(n+1)I, \ A \text{ est inversible.}}$$

❀

(d) Montrer que $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

RÉPONSE:

Comme A est inversible c'est aussi le cas de G, d'après la question 3, la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est libre, et de cardinal égal à $n = \text{Dim } R^n$

$$\boxed{(v_1, \dots, v_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}^n.}$$

❀

Sujet 4 : Agro 2024

Question de cours

Énoncer le théorème d'intégration par parties pour les intégrales sur un segment.
RÉPONSE:

Remarque : On demande la version simple vue en première année pas celle de deuxième année sur les intégrales impropres

Théorème 1.
*Soit u et v deux fonctions **de classe** $\mathscr{C}^1$ **sur** $[a;b]$ alors*

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

❀

Exercice préparé

Soit n un entier naturel non-nul.
On dispose de n jetons et de trois urnes numérotées de 1 à 3 .
Pour chaque jeton, on choisit une des trois urnes au hasard et avec équiprobablité et on place le jeton dans l'urne choisie. Le placement de chaque jeton est indépendant du placement de tous les autres jetons.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de jetons contenus dans l'urne 1 à la fin de l'expérience, et on note Y le nombre d'urnes restées vides à la fin de l'expérience.

1. Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier naturel n non nul, simule l'expérience aléatoire décrite ci-dessus, et renvoie les valeurs de X et de Y obtenues.

RÉPONSE:

```
import  random as rd
def simul(n):
    NbUrne=[0,0,0] #nb de bille dans chaque urne
    for i in range(n):
        r=rd.randint(0,2) #décalage indice tableau
        NbUrne[r]+=1
    NbVide=0
    for i in range(3):
        if NbUrne[i]==0:
            NbVide+=1
    return NbUrne[0],NbVide
```

❀

2. Dans cette question, $n = 10$. Utiliser la fonction précédente pour simuler un grande nombre de fois l'expérience et obtenir une valeur approchée de $E(XY), E(X)$ et $E(Y)$. Que peut-on conjecturer sur la valeur de la covariance du couple (X, Y) ?

RÉPONSE:

```
N=10**5
S1,S2,S3=0,0,0
for i in range(N):
    X,Y=simul(10)
    S1+=X
    S2+=Y
    S3+=X*Y

print("E(X)=", S1/N)
print("E(Y)=", S2/N)
print("E(XY)=", S3/N)
print("Cox(X,Y)=", -S1*S2/N**2+S3/N)
```

On obtient

```
E(X)= 3.3299
E(Y)= 0.05123
E(XY)= 0.17187
Cov(X,Y)= 0.0012792229999999996
```

$$\boxed{\text{La covariance de } X \text{ et } Y \text{ semble nulle.}}$$

□

❀

3. Dans cette question, $n = 2$.
   (a) Déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, puis donner la loi conjointe du couple (X, Y) sous forme de tableau.

RÉPONSE:

X peut prendre toutes les valeurs entières entre 0 et $n = 2$ et Y peut prendre les valeurs 1 et 2, car il ne peut pas rester 3 urnes vides , ni 0 urnes vides ar on ne place que deux billes

Remarque : Le jour de l'oral commencer par tracer le tableau avec les valeurs que vous avez trouvées au tableau **puis** justifier à l'oral certaines valeurs. Commencez par placer et justifier les valeurs nulles

$Y\backslash X$	0	1	2	loi Y
1	$2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times 2$	0	$\frac{6}{9}$
2	$2\left(\frac{1}{3}\right)^2$	0	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\frac{3}{9}$
loi X	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	

❀

(b) Donner la loi de X, puis celle de Y.

RÉPONSE:

Les lois marginales de X et Y s'obtiennent en faisant la somme sur les signe et les colonnes ! Attention à savoir justifier avec le théorème des probabilités totales.
Par exemple

$$\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(Y=1,X=1)+\mathbb{P}(Y=2,X=1)$$

❀

(c) Calculer la covariance du couple (X,Y).

RÉPONSE:

Remarque : Il faut citer le théorème de transfert et la formule de KH, ne pas simplifier les fractions trop tôt

$$\begin{aligned}
E(X) &= 0\times\frac{4}{9}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{4}{9}\\
&= \frac{6}{9}\\
E(Y) &= 1\times\frac{6}{9}+2\times\frac{3}{9}\\
&= \frac{12}{9}\\
E(XY) &= 1\times 0\times\frac{2}{9}+1\times 1\times\frac{4}{9}+1\times 2\times 0+2\times 0\times\frac{2}{9}+2\times 1\times 0+2\times 2\times\frac{1}{9} && \text{th transfert}\\
&= \frac{4}{9}+\frac{4}{9}=\frac{8}{9}
\end{aligned}$$

Donc

$$\operatorname{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{8}{9}-\frac{6\times 12}{9\times 9}=0$$

$$\boxed{\operatorname{Cov}(X,Y)=0}$$

Remarque : Une question supplémentaire, à l'oral serait sûrement « peut on dire que X et Y sont indépendantes ? ».

❀

4. Dans cette question, on revient au cas général où n est un entier naturel quelconque.
Pour $i \in \{1,2,3\}$, on note Y_i la variable aléatoire qui vaut 1 si l'urne numéro i est vide à la fin de l'expérience, et qui vaut 0 sinon.

(a) Déterminer la loi de X, et donner la valeur de son espérance.

RÉPONSE:

X compte le nombre de succès "la boule i tombe dans l'urne 1 " lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes et identiques, la probabilité d'un succès est $\frac{1}{3}$

$$\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, 1/3),\ E(X) = \frac{n}{3},}$$

❀

(b) En remarquant que $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$, calculer $E(Y)$.

RÉPONSE:

Y_i ne peut prendre que deux valeurs 1 et 0, elle suit donc une loi de Bernoulli.

$$\mathbb{P}(Y_i = 1) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

"Aucune bille ne tombe dans l'urne i "= " toutes les boules tombent dans les deux autres urnes"

$$\boxed{\text{Pour } i \in [\![1,3]\!],\ Y_i \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}$$

Donc comme $E(Y) = E(Y_1) + E(Y_2) + E(Y_3)$

$$\boxed{E(Y) = 3\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}$$

❀

(c) Démontrer que :

$$\forall i \in \{2,3\}, \forall j \in [\![0, n]\!], \qquad \mathbb{P}\left(X = j \cap Y_i = 1\right) = \binom{n}{j} \times \frac{1}{3^n}.$$

RÉPONSE:

Remarque : le résultat n'est pas valable pour $i = 1$.

Supposons par exemple que $i = 2$, $[X = j] \cap [Y_2 = 1]$ se réalise si et seulement si j billes tombent dans l'urne 1 , 0 billes tombent dans l'urne 2 et $n - j$ billes tombent dans l'urne 3. Il faut choisir parmi les n tirages ceux qui donnent 1

$$\boxed{\forall i \in \{2,3\}, \forall j \in [\![0, n]\!], \qquad \mathbb{P}\left(X = j \cap Y_i = 1\right) = \binom{n}{j} \times \frac{1}{3^n}.}$$

❀

(d) Calculer alors $E(XY_i)$ pour $i \in \{2,3\}$. Que vaut cette espérance si $i = 1$?

RÉPONSE:

Soit $i \in \{2,3\}$

$$\begin{aligned}
E(XY_i) &= \sum_{j \in [\![0, n]\!], y \in \{0,1\}} j y \mathbb{P}\left(X = j \cap Y_i = y\right) && \text{th de transfert} \\
&= \sum_{j \in [\![0, n]\!]} j \mathbb{P}\left(X = j \cap Y_i = 1\right) && \text{termes nuls} \\
&= \sum_{j \in [\![0, n]\!]} j \binom{n}{j} \frac{1}{3^n} \\
&= \frac{1}{3^n} \sum_{j=1}^{n} j \binom{n}{j} \\
&= \frac{1}{3^n} \sum_{j=1}^{n} n \binom{n-1}{j-1} && \text{formule classique} \\
&= \frac{n}{3^n} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} && \text{chg d'indice} \\
&= \frac{n}{3^n} (1+1)^{n-1} && \text{formule du binôme}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour } i \in \{2,3\},\ E(XY_i) = n\frac{2^{n-1}}{3^n}}$$

On constate que pour $j \neq 0$

$$\mathbb{P}\left(X = j \cap Y_1 = 1\right) = 0$$

donc

$$E(Xy_1) = 0 \times 1 \mathbb{P}(X = 0 \cap Y_1 = 1) + 0$$

$$\boxed{E(XY_1) = 0}$$

❀

(e) Calculer la covariance du couple $(X,\ Y)$.

RÉPONSE:

On commence par calculer $E(XY)$

$$\begin{aligned}E(XY) &= E(X(Y_1+Y_2+Y_3))\\ &= E(XY_1)+E(XY_2)+E(XY_3)\\ &= n\frac{2^n}{3^n}\end{aligned}$$

En utilisant la formule de König-Huyggens

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= E(XY)-E(X)E(Y)\\ &= n\frac{2^n}{3^n}-\frac{n}{3}\times 3\left(\frac{2}{3}\right)^n\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y)=0}$$

Remarque : X et Y ne sont pas indépendantes !

❀

Sujet 5 : Agro 2024

Question de cours

Donner la définition du gradient d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$.

Réponse:

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \qquad \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)(x,y)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}$$

❀

Exercice préparé

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.
On définit sur $\mathbb{R}_n[X]$ l'application D par :

$$\forall P\in\mathbb{R}_n[X],\quad D(P)=P(X+1)-P(X)$$

1. (a) Montrer que D est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

RÉPONSE:

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $P(X+1) \in \mathbb{R}_n[X]$ donc par somme $D(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et λ un réel

$$\begin{aligned}
D(P+\lambda Q) &= (P+\lambda Q)(X+1) - (P+\lambda Q)(X) \\
&= P(X+1) + \lambda Q(X+1) - P(X) - \lambda Q(X) \\
&= P(X+1) - P(X) + \lambda(Q(X+1) - Q(X)) \\
&= D(P) - \lambda D(Q)
\end{aligned}$$

$$\boxed{D \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$$

❀

(b) Déterminer $D(1)$ puis $D\left(X^k\right)$ pour tout entier naturel k de $[\![1, n]\!]$.

RÉPONSE:

$$D(1) = (X+1)^0 - X^0 = 1 - 1 = 0$$

Pour $k \in [\![1, n]\!]$

$$\begin{aligned}
D(X^k) &= (X+1)^k - X^k \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i - X^k \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i
\end{aligned}$$

❀

(c) Donner la matrice de D dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

RÉPONSE:

$$\boxed{\mathcal{M}(D) = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\
0 & 0 & 2 & 3 & \cdots & \binom{j}{1} & \cdots & n \\
\vdots & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{bmatrix}}$$

❀

(d) Déterminer le spectre de D.D est-il diagonalisable ?

RÉPONSE:

La matrice étant triangulaire supérieure son spectre est constitué de ses coefficients diagonaux. Le spectre de D est égal au spectre d'une de ses matrices.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(D) = \{0\}}$$

Si D était diagonalisable, se serait le cas pour sa matrice dans la base canonique,il existerait une matrice P inversible telle que

$$\mathscr{M}(D) = P\Delta P^{-1}$$

où Δ est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux dont comme le spectre de D est réduit à 0, Δ est la matrice nulle. Donc $\mathscr{M}(D) = 0$ ce qui n'est pas le cas

$$\boxed{D \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

❀

2. On pose $H_0(X) = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $H_k(X) = \prod_{i=0}^{k-1} (X - i)$.

(a) Montrer que $\mathscr{B} = (H_0, \dots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

RÉPONSE:

La famille est étagée en degré, elle est donc libre, et de plus son cardinal est égal à la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ qui vaut $n+1$

$$\boxed{\mathscr{B} = (H_0, \dots, H_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$$

❀

(b) Calculer $D(H_0)$. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $D(H_k) = kH_{k-1}$.

RÉPONSE:

$$D(H_0) = D(1) = 0$$

Pour $k \in [\![1, n]\!]$

$$
\begin{aligned}
D(H_k) &= H_k(X+1) - H_k(X) && \text{définition de } D \\
&= \prod_{i=0}^{k-1}(X+1-i) - \prod_{i=0}^{k-1}(X-i) && \text{définition de } H_k \\
&= \prod_{i=0}^{k-1}(X-(i-1)) - \prod_{i=0}^{k-1}(X-i) && \text{définition de } H_k \\
&= \prod_{i=-1}^{k-2}(X-i) - \prod_{i=0}^{k-1}(X-i) && \text{chg indice} \\
&= \prod_{i=0}^{k-2}(X-i)\,[X+1-(X-(k-1))] && \text{factorisation} \\
&= k\prod_{i=0}^{k-2}(X-i)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{D(H_0) = 0 \text{ et pour tout } k \in [\![1, n]\!],\ D(H_k) = kH_{k-1}}$$

❀

(c) Déterminer la matrice représentative de D dans la base $\mathscr{B}$.

RÉPONSE:

$$\boxed{\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(D) = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & n-1 & 0 \\
\vdots & & & & & \ddots & \ddots & n \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{bmatrix}}$$

❀

3. En Python, un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ est codé en listant ses $n+1$ coefficients par ordre croissant de degré. Par exemple, dans $\mathbb{R}_4[X]$, le polynôme $P = 5X^3 - 2X + 3$ est représenté par la liste $[3, -2, 0, 5, 0]$.

(a) Programmer une fonction Python qui prend en argument une liste de longueur $n+1$ modélisant un polynôme P de degré inférieur ou égal à $n-1$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ et un réel a, et qui renvoie alors la liste modélisant $(X-a)P$.

RÉPONSE:

```
def multi(P,a):
    n=len(P)-1
```

```
    R=[-a*P[0]]
    for i in range(1,n+1):
        R.append(P[i-1]-a*P[i])
    R.append(P[n])
    return R
```

❀

(b) Programmer une fonction Python qui prend en argument un entier naturel non nul n et qui renvoie la liste modélisant le polynôme H_n.

RÉPONSE:

Version récursive

```
def H_rec(k):
    if k==0:
        return [1]
    else:
        return multi(H_rec(k-1),k-1)
```

Version itérative

```
def H(k):
    R=[1]
    for i in range(0,k):
        R=multi(R,i)
    return R
```

❀

4. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

   (a) Montrer que $H_2(Y)$ admet une espérance, en déduire que $H_1(Y)$ et $H_0(Y)$ admettent une espérance. Déterminer alors $E(H_0(Y)), E(H_1(Y))$ et $E(H_2(Y))$.

RÉPONSE:

Sous réserve de convergence (qui se confond avec la convergence absolue)

$$\begin{aligned}
E(H_2(Y)) &= \sum_{k=0}^{+\infty} H_2(k)\mathbb{P}(Y=k) && \text{Th de transfert}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\mathbb{P}(Y=k)\\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(k-2)!}\\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{i+2}}{i!} && \text{chg indice}\\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^2\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{\lambda^i}{i!}\\
&= \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda} && \text{série expo CV}\\
&= \lambda^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(H_2(Y)) = \lambda^2,\ E(H_1(Y)) = E(Y) = \lambda,\ E(H_0(Y)) = E(1) = 1}$$

❀

(b) Déterminer les coordonnées de $1, X$ et X^2 dans la base (H_0, H_1, H_2).

RÉPONSE:

$$\boxed{1 = 1 \times H_0,\ X = 1 \times H_1,\ X^2 = H_2 + H_1}$$

❀

(c) Retrouver la valeur de la variance de Y.

RÉPONSE:

$E(Y^2) = E(H_2(Y) + H_1(Y)) = E(H_2(Y)) + E(H_1(Y)) = \lambda^2 + \lambda$ En utilisant la formule de KH

$$\boxed{V(Y) = \lambda}$$

❀

5. On note $\mathscr{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
À tout élément $f \in E$, on associe la fonction $g = \tilde{D}(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \tilde{D}(f)(x) = f(x+1) - f(x)$$

(a) On dit qu'un réel λ est une valeur propre de $\tilde{D}$ s'il existe une fonction non nulle f de E telle que $\tilde{D}(f) = \lambda f$. En considérant les fonctions $h_a : x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}$ et $k_a : x \longmapsto \sin(\pi x)\mathrm{e}^{ax}$ où a est un réel, déterminer les valeurs propres de $\tilde{D}$.

RÉPONSE:

Soit $a \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{e}^{a(x+1)} - \mathrm{e}^{ax} = \mathrm{e}^{ax}\left(\mathrm{e}^{a} - 1\right)$$

donc

$$\tilde{D}(h_a) = (\mathrm{e}^{a} - 1)h_a$$

donc tous les réels de la forme $\mathrm{e}^{a} - 1$ sont des valeurs propres or $a \mapsto \mathrm{e}^{a} - 1$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1; +\infty[$, théorème de la bijection.
De même on trouve que

$$\tilde{D}(k_a) = (-\mathrm{e}^{a} - 1)h_a$$

donc tous les réels de la forme $-\mathrm{e}^{a} - 1$ sont des valeurs propres or $a \mapsto -\mathrm{e}^{a} - 1$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1; -\infty[$, théorème de la bijection.

$$\boxed{\text{Tous les réels sont valeurs propres de } \tilde{D}.}$$

❀

(b) Si F désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité X, montrer que $g = \tilde{D}(F)$ est une densité de probabilité.

RÉPONSE:

On étudie $f\ : x \mapsto F(x+1) - F(x)$ définie sur $\mathbb{R}$.
Comme F est continue c'est aussi le cas pour f.
Comme F est croissante, on en déduit que f est positive.
Soit $A \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}
\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^A F(t+1) - F(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^A F(t+1)\,\mathrm{d}t - \int_0^A F(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_1^{A+1} F(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^A F(t)\,\mathrm{d}t && \text{changement de var} \\
&= \int_A^{A+1} F(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t && \text{Chasles}
\end{aligned}$$

Comme F est une fonction de répartition

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$$

Donc pour $\varepsilon > 0$ il existe $A_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall t \in [A_0; +\infty[\qquad 1-\varepsilon \leqslant f(t) \leqslant 1+\varepsilon$$

donc si on choisi $A > A_0$

$$\forall t \in [A; A+1] \qquad 1-\varepsilon \leqslant f(t) \leqslant 1+\varepsilon$$

en intégrant sur un intervalle de longueur 1

$$\forall A \in [A_0; +\infty[\qquad 1-\varepsilon \leqslant \int_A^{A+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 1+\varepsilon$$

On a donc démontré

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A_0 > 0, \forall A \in [A_0; +\infty[\qquad 1-\varepsilon \leqslant \int_A^{A+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 1+\varepsilon$$

ce qui démontre que

$$\lim_{A\to+\infty} \int_A^{A+1} F(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

De même s oit $A \in \mathbb{R}_-$

$$\begin{aligned}
\int_A^0 f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_A^0 F(t+1) - F(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_A^{A+1} F(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^0 F(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Comme F est une fonction de répartition

$$\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$$

Et en démontre en utilisant la même rédaction que précédemment

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A_0 < 0, \forall A \in]-\infty; A_0] \qquad -\varepsilon \leqslant \int_A^{A+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon$$

donc

$$\lim_{A\to-\infty}\int_A^{A+1} F(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

donc l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f$ converge et vaut 1

$$\boxed{F \text{ est une densité}}$$

❀

(c) Expliciter g si X suit la loi uniforme sur $[0;1]$.

RÉPONSE:

□

❀