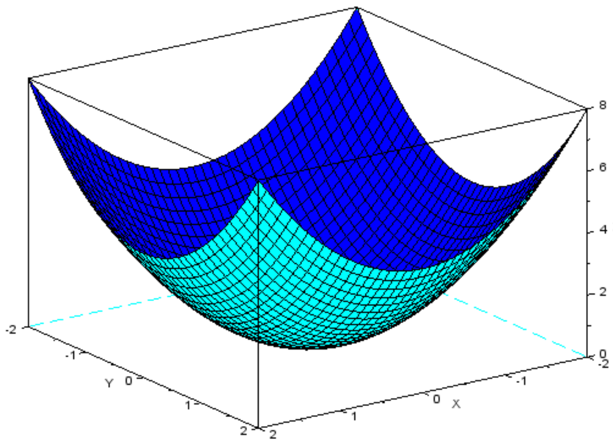
RÉVISIONS : FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

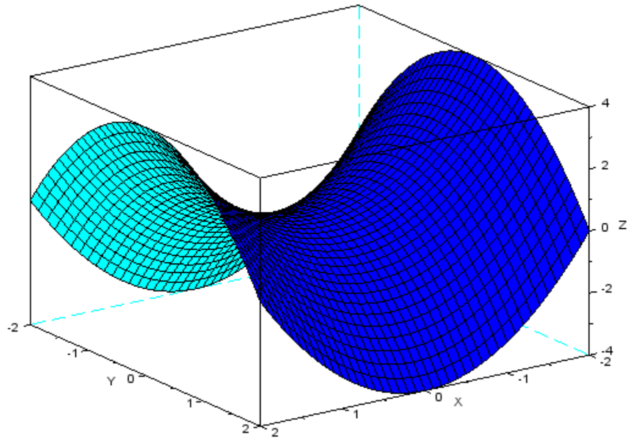
Préliminaires

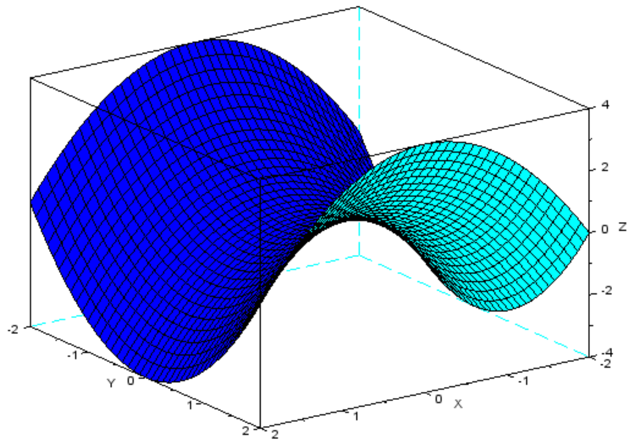
Exercice 1.
Grace à Python, on a représenté le graphe des trois fonctions suivantes

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^2 - y^2 \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^2 + y^2 \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & -x^2 + y^2 \end{array}$$

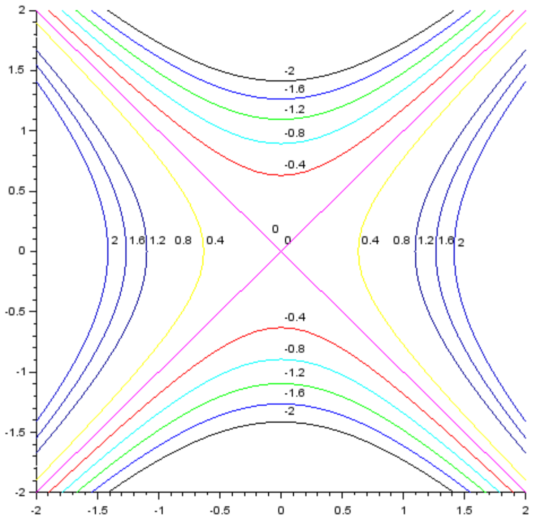


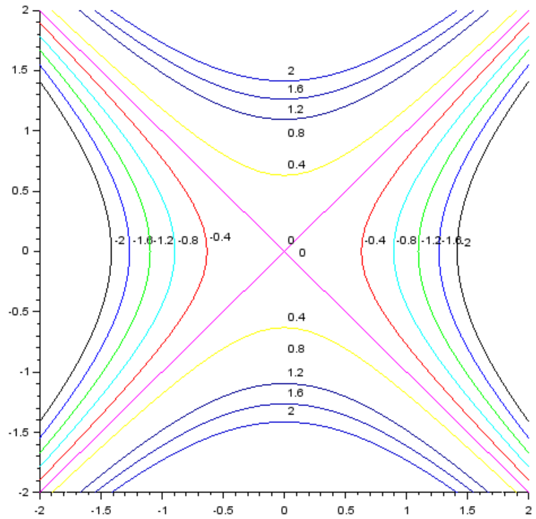


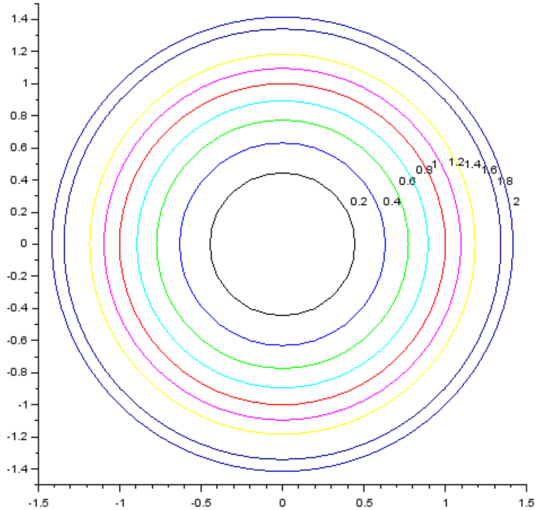


Associer les trois graphes aux trois fonctions. Justifier rapidement votre réponse.

Exercice 2.
Pour les fonctions de l'exercice précédent nous avons tracé les lignes de niveau. Associer chaque graphe à sa fonction (x est en abscisses et y en ordonnées).





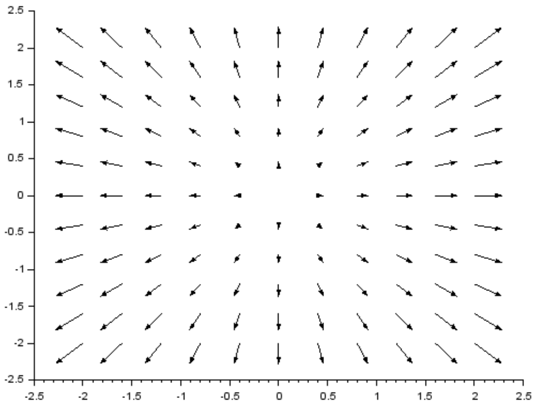


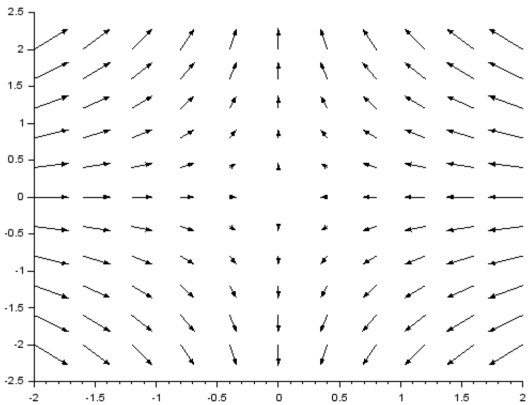
Dérivabilité

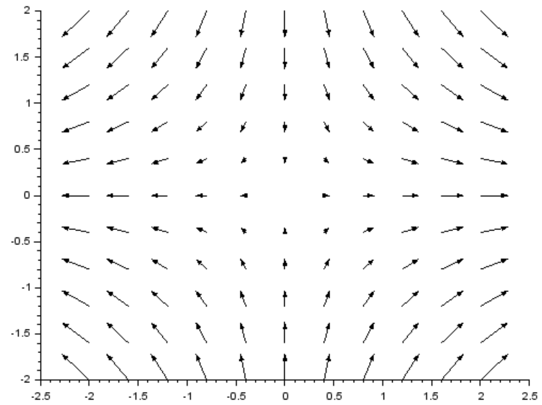
Exercice 3.
Calculer les deux dérivées premières des fonctions suivantes. Montrer qu'elles sont de classes $\mathscr{C}^1$ sur un ensemble que l'on déterminera.

1. $(x,\ y) \longmapsto x$.
2. $(x,\ y) \longmapsto y$.
3. $(x,\ y) \longmapsto x + y$.
4. $(x,\ y) \longmapsto x^2 - y^3$.
5. $(x,\ y) \longmapsto \ln\left(1 + x^2 + y^2\right)$.
6. $(x,\ y) \longmapsto \exp\left(x^2 + y^2\right)$.
7. $(x,\ y) \longmapsto \exp\left(\mathrm{e}^x + y\right)$.
8. $(x,\ y) \longmapsto \cos(x)\sin(y)$.
9. $(x,\ y) \longmapsto \cos(x + y)$
10. $(x,\ y) \longmapsto x^\alpha y^{1-\alpha}$ avec $\alpha \in]0;\, 1[$.

Exercice 4.
Pour les fonctions de l'exercice 1 nous avons tracé les gradients. Associer chaque gradient à sa fonction.







Exercice 5.
Calculer le gradient puis donner l'approximation pur des petites variations en $(1,\ 1)$ et l'équation du plan tangent. des fonctions suivantes

1. $(x,\ y) \mapsto xy$
2. $(x,\ y) \mapsto x^2 + y^2$
3. $(x,\ y) \mapsto x^2 - y^2 + xy$
4. $(x,\ y) \mapsto x^2y^2 + xy^3$
5. $(x,\ y) \mapsto \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$
6. $(x,\ y) \mapsto \ln\left(1 + x^2 + y^2\right)$

Exercice 6.
Reprendre l'exemple précédent en remplaçant $(1,\ 1)$ par $(1,\ -1)$.

Exercice 7 (Application calcul d'une incertitude maximale)**.**
On rappelle la loi d'Ohm
$$U = RI$$
où U est la tension en volts, I l'intensité en ampères et R la résistance en ohms.

1. On cherche à mesurer une tension connaissant la valeur de $R = 1.5\Omega$ et de $I = 2.5A$, l'incertitude maximale sur R est 0.01Ω et l'incertitude sur I est de $0.1A$
   (a) Écrire la formule des petites variations pour $U = f(R, I)$ (on considère que U est une fonction de I et de R) autour des valeurs mesurée.
   (b) En déduire une estimation de l'incertitude maximale sur la mesure de U.
2. On cherche maintenant à mesurer la valeur de R connaissant
$$U = 2 \pm 0.1V \qquad I = 1.5 \pm 0.2A$$
   (a) Donner la formule des petites variations pour la fonction $R = g(U, I)$ au voisinage des valeurs mesurées.

(b) l'un des coefficients obtenu est négatif, on ne peut donc pas utiliser directement la même méthode que précédemment. En utilisant l'inégalité triangulaire, donner une estimation de l'incertitude maximale sur la mesure de R.

Exercice 8 (Application calcul d'incertitude maximale)**.**
On rappelle la formule des gaz parfaits

$$PV = nRT$$

où P est la pression exprimée en pascals, V le volume exprimé en m^3 n le nombre de moles et T la température en kelvins et R la constante des gaz parfaits.

On mesure

$$P = 1000h \pm 10Pa \qquad T = 298.15 \pm 0.1K \qquad n = 1 \pm 0.01 \qquad V = 24.8 \pm 0.3\ell$$

En s'inspirant de la méthode précédente donner une estimation de R ainsi que l'incertitude maximale associée.

Dérivées d'ordre 2

Exercice 9.
Reprendre l'exercice 3 et calculer les dérivées partielles secondes des fonctions.

Problèmes

Exercice 10.
Soit f la fonction définie pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y$$

1. (a) Calculer les dérivées partielles premières de f.
   (b) En déduire que le seul point critique de f est $A = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$. Calculer $m = f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$
2. (a) Calculer les dérivées partielles secondes de f.
3. (a) Développer $2(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2$.
   (b) En déduire que m est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.
4. On considère la fonction g définie pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(x,y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y$$

   (a) Utiliser la question 3) pour établir que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, g(x,y) \geqslant -\frac{1}{6}$.
   (b) En déduire que g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

Exercice 11.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x e^{x(y^2+1)}$

1. (a) Déterminer les dérivées partielles premières de f
   (b) En déduire que le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum local est $A = (-1, 0)$.
2.
3. Déterminer les dérivées partielles secondes de f.
4. (a) Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \geqslant x e^x$.
   (b) En étudiant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x e^x$, conclure que le point critique trouvé à la question 2b) est un extremum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 12.
On pose

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & (1+x+y)^2 - (1+x-y)^2 \end{array}$$

1. Trouver tous les points critiques de f.
2. tracer le tableau de variations de

$$h : t \mapsto f(-1+t, t) \qquad g : t \mapsto f(-1+t, -t) k : t \mapsto f(-1+t, 0)$$

3. Le point $(-1, 0)$ est il un extremum de f ?

Exercice 13 ( )**.**
On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi(x) = 2\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{x}$$

ainsi que la fonction numérique f des variables réelles x et y définie par :

$$\forall (x,y) \in \,]0;+\infty[\, \times \,]0;+\infty[, \quad f(x,y) = e^{x+4y}\ln(xy)$$

On admet que l'ensemble de définition de f est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Étude des zéros de φ.

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, ainsi que la limite de $\frac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$, déterminer sa dérivée.
4. Dresser le tableau de variation de φ, faire apparaître les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.
5. On rappelle que $\ln(2) \simeq 0,7$. Montrer l'existence de deux réels positifs α et β tels que :

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$$

6. Proposer un programme en python permettant d'encadrer α dans un intervalle d'amplitude 10^{-2}. On utilisera le procédé de dichotomie.

Points critiques de f sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$.
2. Calculer les dérivées partielles premières et prouver que pour x, et y strictement positifs
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f(x,y) + \frac{1}{x}\mathrm{e}^{x+4y} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4f(x,y) + \frac{1}{y}\mathrm{e}^{x+4y} \end{cases}$$
3. Montrer que les points de coordonnées respectives $\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right)$ et $\left(\beta, \dfrac{\beta}{4}\right)$ sont des points critiques de f sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$.
4. Calculer les dérivées partielles secondes sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ et établir que :
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = \frac{\alpha-1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{2\alpha} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = 16\frac{\alpha-1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{2\alpha} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = \frac{4}{\alpha}\mathrm{e}^{2\alpha} \end{cases}$$

Exercice 14 (Fonctions homogènes **).**
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. On définit, pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ fixé, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $t\mapsto g(t)=f(tx,ty)$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.
2. On suppose désormais que f est homogène, c'est à dire $f(tx,ty)=tf(x,y)$ pour tous $x,y,t\in\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que pour tous $x,y,t\in\mathbb{R}$, on a
   $$f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)y.$$
   (b) En déduire qu'il existe des réels α et β que l'on déterminera tels que, pour tous $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a
   $$f(x,y) = \alpha x + \beta y.$$
   (c) Étudier la réciproque.

Exercice 15 (Fonctions invariantes par translation **).**
Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, de classe C^1, et vérifiant :
$$\forall (x,y,t)\in\mathbb{R}^3,\ f(x+t,y+t) = f(x,y).$$
Démontrer que, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Exercice 16 (Fonctions harmoniques **).**
Une fonction $f:U\to\mathbb{R}$ de classe C^2, définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, est dite harmonique si pour tout (x,y)
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$
Dans toute la suite, on fixe f une fonction harmonique.

1. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^3$. Démontrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}$ sont harmoniques.
2. On suppose désormais que f est définie sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ est radiale, c'est-à-dire qu'il existe $\varphi:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(x,y)=\varphi(x^2+y^2)$. Démontrer que φ' est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.
3. En déduire toutes les fonctions harmoniques radiales.