Révisions et méthodes
Fonctions de deux variables.

BCPST Spé 2

Lycée Champollion Grenoble

Septembre 2025

Table des matières

I Introduction

I.1 Premier exemple

On va étudier des fonctions du type

$$\begin{array}{rccc} : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,\ y) & \mapsto & f(x,\ y) \end{array}$$

Exemple :

$$\begin{array}{rccc} : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,\ y) & \mapsto & xy \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,\ y) & \mapsto & x+y \end{array}$$

Parfois ces fonctions ne seront pas définies sur $\mathbb{R}^2$ en entier mais sur un sous ensemble (simple) de $\mathbb{R}^2$, la plupart du temps un pavé ouvert, ou un autre sous ensemble simple que vous pouvez dessiner.

I.2 Définitions

Définition 1 (Pavé du plan)**.**
*Soit $a < b$ et $c < d$ quatre réels alors on peut définir le **pavé** ouvert*

$$]a; b[\times]c; d[= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle/ a < x < b \text{ et } c < y < d\right\}$$

On peut aussi remplacer a par $-\infty$, b par $+\infty$, c par $-\infty$ et d par $+\infty$

Attention : Dans toute la suite $\mathscr{D}$ désignera un pavé ouvert du plan.
Pour représenter une telle fonction on peut faire tracer par python la surface représentative

Définition 2 (Surface représentative)**.**
*Soit f une fonction de $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, la **surface ou nappe représentative** de f est l'ensemble des points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $z = f(x, y)$.*

Définition 3 (Lignes de niveaux)**.**
Si f est une fonction de deux variables réelles et λ est une constante alors une ligne de niveau est l'ensemble des points $(x,\ y)$ de l'ensemble de définition qui vérifient

$$\lambda = f(x, y)$$

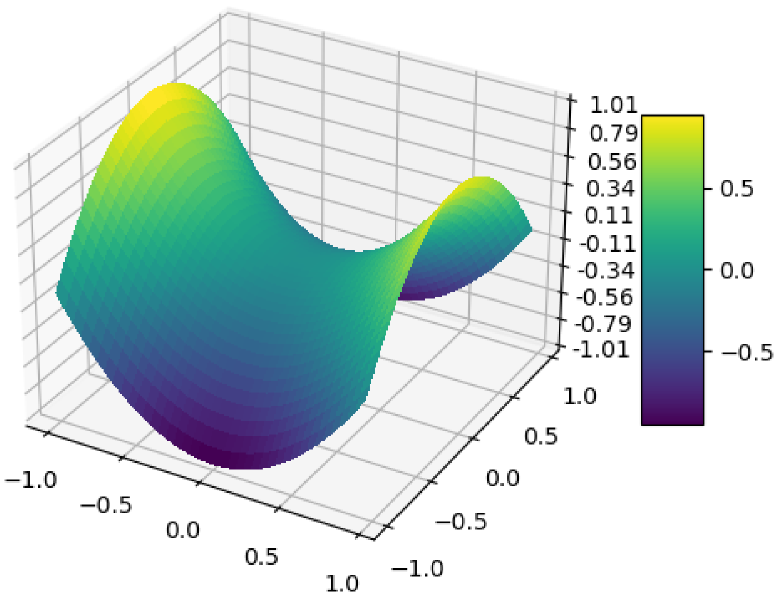

FIGURE 1 – Graphe de la fonction $(x,\ y) \mapsto x^2 - y^2$.

Définition 4.
Soit f une fonction de deux variables et (a, b) dans l'ensemble de définition, les ***fonctions partielles*** *sont les fonctions*

$$f_1 : x \mapsto f(x, b) \qquad f_2 : y \mapsto f(a, y)$$

II Continuité

II.1 Définitions.

On va adapter la définition à une fonction de deux variables à valeurs réelles.

Définition 5 (Continuité en un point (a ne pas retenir))**.**

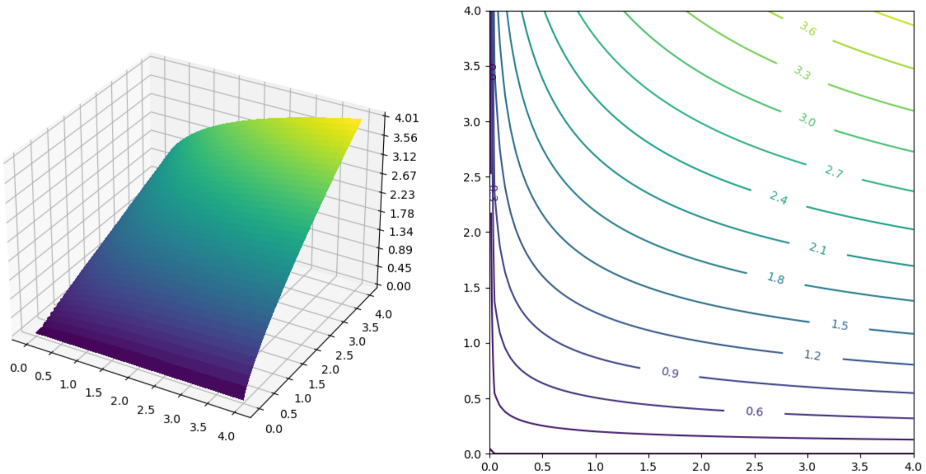

FIGURE 2 – La surface représentative d'une fonction et les lignes de niveaux.

Soit f une fonction de deux variables réels à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit $(x_0,\ y_0)$ un point dans l'ensemble de définition de f.
Alors f est continue en $(x_0,\ y_0)$ si et seulement si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) =$$

***Attention :** dans l'esprit du programme nous ne définirons pas la notion de limite qui est bien plus compliquée que ce que nous avons déjà vu !*

Définition 6 (Continuité sur un ensemble)**.**
Soit f une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles et soit $\mathscr{D}$ un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$. On dit que f est ***continue sur (l'ensemble)*** *$\mathscr{D}$*

si et seulement si elle est

Attention : On ne devrait pas vous demander de prouver qu'une fonction est continue.

II.2 Propriétés.

Proposition 1 (Continuité des fonctions coordonnées)**.**

Les deux fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}^2$ *:*

$$\begin{array}{rccc} : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,\ y) & \longmapsto & x \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,\ y) & \longmapsto & y \end{array}$$

Proposition 2 (Opérations de base)**.**
Soit f et g deux fonctions de deux variables réelles à valeurs réelles qui sont continues en $(x_0,\ y_0) \in \mathbb{R}^2$.
Alors

- *$f+g$ est continue en $(x_0,\ y_0)$.*
- *fg est continue en $(x_0,\ y_0)$.*
- *Si de plus $g(x_0,\ y_0) \neq 0$ alors f/g est continue en $(x_0,\ y_0)$.*

  Ces résultats s'adaptent facilement à la continuité sur un ensemble.

Proposition 3 (Composition)**.**
Soit f une fonction de deux variables définie sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $I \subset \mathbb{R}$ et soit φ une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f et φ sont continues sur leur ensemble de définition alors $\varphi \circ f$ est continue sur

Exemple : $(x,\ y) \mapsto \mathrm{e}^{x^2+y^2}$ et $(x,\ y) \mapsto \ln\left(x^2+y^2\right)$ sont continues sur leur ensemble de définition.

III Dérivabilité au premier ordre

III.1 Définitions

Définition 7 (Dérivée partielle d'ordre 1)**.**
Soit f une fonction de deux variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soit $(a,\ b)$ un point où f est définie.

- *Dérivée selon la première variable. Si la fonction $f_1 : \square \mapsto f(\square,\ b)$ (avec b constant) est dérivable en a alors on note*

  $$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = f_1'(a)$$

  *C'est la première **dérivée partielle** au point (a,b), ou la dérivée (partielle) selon la première variable, ou la dérivée (partielle) selon la direction x.*
- *Dérivée selon la deuxième variable. Si la fonction $f_2 : \triangle \mapsto f(a,\ \triangle)$ (avec a constant) est dérivable en b alors on note*

  $$\frac{\partial f}{\partial y}(a,\ b) = f_2'(b)$$

  *C'est la première **dérivée partielle** ou la dérivée (partielle) selon la deuxième variable, ou la dérivée partielle selon la direction y.*

Remarque : On trouve aussi les notations $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$, et on écrira souvent $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$.

Méthode : Calculs des dérivées

Il suffit souvent de considérer soit x soit y comme une constante et de dériver selon l'autre variable avec les règles opératoires usuelles.

Exemple : L'étude des ensembles de définitions des fonctions suivantes sont laissées en exercice.

1. $f : (x,\ y) \mapsto xy^2$ alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\ y) = y^2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\ y) = 2xy$
2. $g : (x,\ y) \mapsto \cos(x+y^2)$ alors $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,\ y) = -\sin(x+y^2)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,\ y) = -2y\sin(x+y^2)$
3. $h : (x,\ y) \mapsto \mathrm{e}^{x^2+y^2}$ alors $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,\ y) = 2x\mathrm{e}^{x^2+y^2}$ et $\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,\ y) = 2y\mathrm{e}^{x^2+y^2}$

Définition 8 (Fonction de classe $\mathscr{C}^1$)**.**
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son ensemble de définition $\mathscr{D}$ si et seulement si

- *En tout point de $\mathscr{D}$ elle est dérivable selon les deux variables*
- *Et si $(a,\ b) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,\ b)$ **et** si $(a,\ b) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ sont continues sur $\mathscr{D}$.*

Attention : On ne devrait pas vous demander de prouver le caractère $\mathscr{C}^1$ d'une fonction.

Exemple : Toutes les fonctions de l'exemple précédent sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$

Proposition 4 (Lien entre continuité et $\mathscr{C}^1$)**.**
Si f est de sur $\mathscr{D}$ alors elle est sur $\mathscr{D}$.

Attention : La réciproque est fausse on pourra par exemple étudier $(x,\ y) \mapsto |x+y|$ en 0.

III.2 Opérations

Proposition 5 ($\mathscr{C}^1$ sur un ensemble)**.**
Les propositions 2 et 3 s'adaptent aux fonctions $\mathscr{C}^1$.

Proposition 6 (Dérivées de $t \mapsto f(u(t), v(t))$)**.**
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ensemble $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2$ et $t \mapsto u(t)$, $t \mapsto v(t)$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que $\varphi : t \mapsto f(u(t), v(t))$ soit définie. alors φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur *et*

$$\forall t \in I \qquad \varphi'(t) =$$

Exemple : Calculons les dérivées de $t \mapsto \cos(t)\sin(t)$ de deux façons.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(t) = f(2+2t, t^2)$. Démontrer que g est C^1 et calculer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.

III.3 Gradient, plan tangent et approximation.

Définition 9 (Gradient)**.**
Quand une fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ensemble $\mathscr{D}$ et $(a, b) \in \mathscr{D}$ on note

$$\overrightarrow{grad}(f)(a,\ b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,\ b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,\ b)\right)$$

C'est le ***gradient de*** *f en $(a,\ b)$.*

On constate que les gradients sont orthogonaux aux lignes de niveau et pointent vers la pente la plus forte

Proposition 7 (Approximation pour de petites variations)**.**

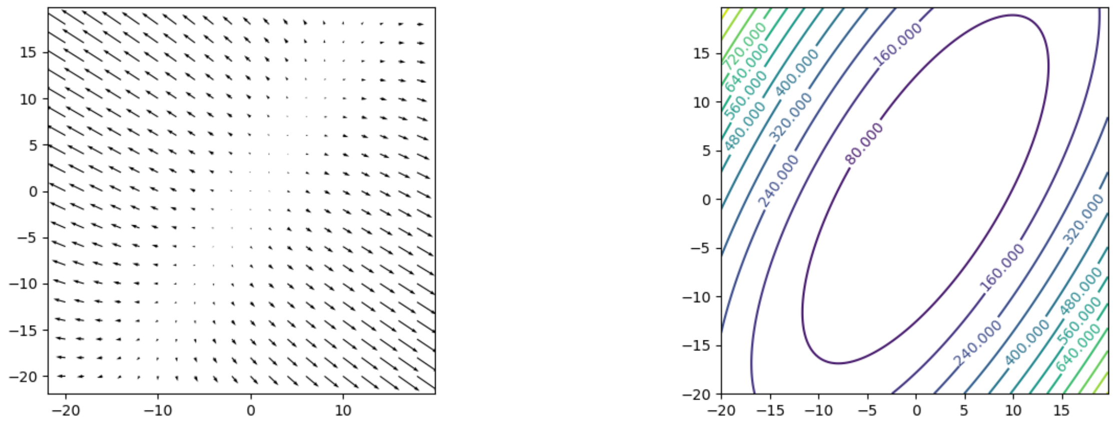

FIGURE 3 – Lignes de niveau et gradient pour $(x,\ y) \mapsto x^2 - y \cdot x$

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{D}$ et $(x,\ y)$ un point à l'intérieur de $\mathscr{D}$.

$$f(x+h, y+k) = f(x,\ y) + \underbrace{\overrightarrow{grad}(x,\ y)\cdot(h,k)}_{\textit{produit scalaire}} + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$$

Remarque : $\sqrt{h^2+k^2}$ est la distance euclidienne entre les points $(x,\ y)$ et $(x+h,\ y+k)$.
Attention : Le programme omet le terme d'erreur pour obtenir

$$f(x+h, y+k) \approx f(x,\ y) + \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{grad}}(x,\ y)\cdot(h,k)}_{\text{produit scalaire}}$$

Exercice : Écrire la forme développée de cette relation en calculant le produit scalaire, on rappelle que l'on s'est placé dans un repère orthonormé.

Exercice : Écrire une forme $f(x,y) \approx f(x_0, y_0)\dots$

Remarque : Les formes précédentes nous donnent l'équation du plan tangent à la surface représentative, de la même manière que le DL nous donnait l'équation de la tangente pour une fonction d'une variable.

Proposition 8 (Plan tangent)**.**
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{F} \subset \mathbb{R}^2$ et (x_0, y_0) un point à l'intérieur de $\mathscr{D}$.

Le plan tangent à la surface représentative de f au point (x_0, y_0) a pour équation

$$T : z = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

IV Dérivabilité au deuxième ordre.

IV.1 Définitions.

Définition 10 (Dérivées partielles d'ordre 2)**.**
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un domaine $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2$. Les dérivées sont elles même des fonctions définies sur $\mathscr{D}$. Si on peut dériver ces fonctions on note alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a, b) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a, b)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a, b) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a, b)$$

Définition 11.
Classe $\mathscr{C}^2$] Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2$. Les dérivées sont elles même des fonctions définies sur $\mathscr{D}$. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{D}$ si les fonctions suivantes sont définies et continues sur $\mathscr{D}$.

$$(a,\ b) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \qquad (a,\ b) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$$

$$(a,\ b) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \qquad (a,\ b) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(a, b)$$

Proposition 9 (Opérations)**.**
Les propositions 2 et 3 s'adaptent aux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$

IV.2 Théorème de Schwarz.

Théorème 1 (Schwarz[1])**.**
Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{D}$ et si $(a,\ b)$ est un point à l'intérieur de $\mathscr{D}$ alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$$

V Extrema

Définition 12 (Extremum global)**.**
Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2$.

- *On dit que f admet un **maximum** sur $\mathscr{D}$ lorsqu'il existe $(x_0,\ y_0) \in \mathscr{D}$ tel que pour tout $(x,y) \in \mathscr{D}$, on a*
  *. On dit alors que le réel $f(x_0,\ y_0)$ est le maximum de f sur $\mathscr{D}$ et que f **atteint son maximum** en $(x_0,\ y_0)$.*
  On le note

$$\max_{(x,y)\in\mathscr{D}} f(x,y) \qquad \max_{\mathscr{D}} f$$

- *On dit que f admet un **minimum** sur $\mathscr{D}$ lorsqu'il existe $(x_0,\ y_0) \in \mathscr{D}$ tel que pour tout $(x,y) \in \mathscr{D}$, on a*
  *. On dit alors que le réel $f(x_0,\ y_0)$ est le minimum de f sur $\mathscr{D}$ et que f **atteint son minimum** en $(x_0,\ y_0)$. On le note*

$$\min_{(x,y)\in\mathscr{D}} f(x) \qquad \min_{\mathscr{D}} f$$

- *On appelle **extremum** de f sur $\mathscr{D}$ un minimum ou un maximum de f sur $\mathscr{D}$.*

Définition 13 (Extremum local)**.**
Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in \mathscr{D}$.

- *On dit que f admet un **minimum local** en $(x_0,\ y_0)$ si et seulement si il existe un disque $\mathscr{B}$ centré en $(x_0,\ y_0)$ telle que la restriction de f à $\mathscr{D} \cap \mathscr{B}$ atteint un minimum en $(x_0,\ y_0)$.*
- *On dit que f admet un **maximum local** en x_0 si et seulement si il existe un disque $\mathscr{B}$ centré en $(x_0,\ y_0)$ telle que la restriction de f à $\mathscr{D} \cap \mathscr{B}$ atteint un maximum $(x_0,\ y_0)$.*

Remarque : Si f admet un minimum global en $(x_0,\ y_0)$ alors c'est aussi un minimum local, mais la réciproque est fausse.

Théorème 2 (Point critique)**.**
Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{D}$ et que f admet un extremum local en (x_0, y_0) un point à l'intérieur de $\mathscr{D}$, alors $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0) = 0$.
*C'est ce que l'on appelle **un point critique**.*

1. Hermann Amandus Schwarz (né le 25 janvier 1843 à Hermsdorf en province de Silésie et mort le 30 novembre 1921 à Berlin. Il a aussi donné son nom à l'inégalité de Cauchy Schwarz.

Remarque :

1. La réciproque est fausse, il existe des points critiques qui ne sont pas des extrema locaux.
2. Ce résultat ne peut pas s'appliquer aux bords de l'ensemble d'étude!

Méthode

La recherche des points critiques ne donne qu'une condition nécessaire sur les extrema, c'est à dire que l'on trouve des "candidats". Il faut ensuite vérifier si les points trouvés sont des minima locaux, globaux des maxima ou rien du tout. Ce type de recherche sera détailler dans les problèmes que vous rencontrez.