Concepts de bases en probabilités.

BCPST Spé 2

Lycée Champollion Grenoble

Octobre 2023

Table des matières

I Définitions

I.1 Opérations ensemblistes

Dans cette partie, on considère des parties d'un ensemble Ω

Définition 1 (Union et intersection de deux ensembles, complémentaire)**.**
Soit A et B deux sous ensembles de Ω, on note

- *L'union* $A \cup B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- *L'intersection* $A \cap B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ et } x \in B\}$
- *Le complémentaire* $\overline{A} = \{x \in \Omega / x \notin A\}$.

Définition 2 (Généralisation)**.**
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous ensembles de Ω

- *L'union* $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \{x \in \Omega \big/ \exists n \in \mathbb{N} \qquad x \in A_n\}$
- *L'intersection* $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n = \{x \in \Omega \big/ \forall n \in N \qquad x \in A_n\}$

Définition 3 (Dénombrable)**.**
*Un ensemble est **(infini) dénombrable** si ses éléments peuvent être indexés sans répétition ni omission par les entiers de $\mathbb{N}$. Autrement dit si il existe une bijection de $\mathbb{N}$ vers cet ensemble.*

Exemple : $\mathbb{N}$ est dénombrable, $\mathbb{N}^*$ est dénombrable $\mathbb{Z}$ est dénombrable. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable

Proposition 1 (Opérations)**.**
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et B des parties de Ω

- $\displaystyle\overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}$
- $\displaystyle\overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}$

- $B \cap \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \right) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (B \cap A_n)$
- $B \cup \left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \right) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} (B \cup A_n)$

Démonstration :

I.2 Espaces probabilisables

Dans la théorie des probabilités l'univers des possibles est un ensemble Ω et les événements que l'on étudie sont certains sous ensembles de Ω. Par exemple si on lance un dès à six faces, et si l'on s'intéresse à A= "obtenir un nombre pair"

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad A = \{2, 5, 6\}$$

Dans les expériences avec des univers finis que vous avez vu l'année dernière, a priori tout ensemble Ω pouvait être vu comme un événement, dont on pouvait calculer la probabilité.

Définition 4 (événement élémentaire)**.**

*Un **événement élémentaire** est un événement du type* $\{x\}$ *où* $x \in \Omega$.

1. Cas fini.
   On remarque que tout événement est réunion d'événements élémentaires.
2. Cas d'un univers dénombrable.
   On suppose ici que $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_i \dots\} = \{\omega_i, i \in \mathbb{N}\}$ est un univers dénombrable.
   On admet que dans ce cas tout événement est réunion finie ou dénombrable d'événements élémentaires.
3. Cas d'un univers indénombrable.

   Dans ce cas là certaines parties de Ω ne sont pas réunion d'évènements élémentaires

Programme officiel : « Aucune question sur les tribus ne doit être proposée dans une épreuve de mathématiques. »

Définition 5 (σ-algèbre ou tribu)**.**
*Soit Ω un univers. On appelle **tribu** ou $\sigma-$algèbre sur Ω tout ensemble $\mathcal{T}$ de parties de Ω vérifiant :*

1. $\Omega \in \mathcal{T}$.
2. *Si $A \in \mathcal{T}$, alors $\overline{A} \in \mathcal{T}$.*
3. *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$, alors*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$$

Proposition 2 (Propriétés élémentaires d'une σ-algèbre)**.**

Soit Ω un univers et $\mathcal{T}$ une σ-algèbre.
Alors :

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$
2. *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$, alors*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$$

3. *$\mathcal{T}$ stable par union et intersection fini.*

Démonstration :

Exemples élémentaires

1. $\mathcal{T} = \mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω.
2. $\{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu sur Ω.
3. Soit $\Omega = \{a, b, c\}$ alors $\mathscr{C} = \left\{\emptyset, \{a, b\}, \{c\}, \Omega\right\}$ est une tribu (vérification laissée en exercice).
4. On prend une cible de rayon $r = 3m$ et divisée en trois secteurs concentriques .
   On note $\mathscr{P}$ le plan et O le centre de la cible $\Omega = \left\{M \in \mathscr{P} \middle/ \|\overrightarrow{OM}\| < 3\right\}$ et

$$\mathcal{T} = \Big\{\emptyset, \Omega, \left\{M \in \mathscr{P} \middle/ \|\overrightarrow{OM}\| < 1\right\}, \left\{M \in \mathscr{P} \middle/ 1 \leqslant \|\overrightarrow{OM}\| < 2\right\}, \left\{M \in \mathscr{P} \middle/ 2 \leqslant \|\overrightarrow{OM}\| < 3\right\},$$
$$\left\{M \in \mathscr{P} \middle/ 0 \leqslant \|\overrightarrow{OM}\| < 2\right\}, \left\{M \in \mathscr{P} \middle/ 1 \leqslant \|\overrightarrow{OM}\| < 3\right\}, \left\{M \in \mathscr{P} \middle/ 0 \leqslant \|\overrightarrow{OM}\| < 1 \text{ ou } 2 \leqslant \|\overrightarrow{OM}\| < 1\right\}\Big\}$$

Définition 6 (Espace probabilisable)**.**
Un ***espace probabilisable*** *est un couple* $(\Omega, \mathcal{T})$ *où* Ω *est un univers associé à une expérience aléatoire et* $\mathcal{T}$ *est une tribu sur* Ω *des événements liés à cette expérience aléatoire.*

$$\boxed{\text{Si } \Omega \text{ est fini on choisit presque toujours } \mathcal{T} = \mathscr{P}(\Omega).}$$

Vocabulaire :
Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable

1. $\emptyset$ est appelé **l'événement impossible** et Ω **l'événement certain**.
2. On dit qu'un événement A **implique** un événement B lorsque $A \subset B$. (Tout possible ω de A réalise B (i.e. $\forall \omega \in A, \omega \in B$)).
3. Soit A un événement, alors $\overline{A}$ est appelé *l'événement contraire* de A.
4. Deux événements A et B sont dits **incompatibles** lorsque $A \cap B = \emptyset$.

Définition 7 (Système complet d'événements)**.**
On appelle ***système complet d'événements*** *toute famille finie d'événements* $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ *(respectivement toute suite d'événements* $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$*) qui vérifient*

1. *les* A_i *sont deux à deux incompatibles,*
2. $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$ *(respectivement.* $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$*).*

Cette notion correspond à la notion ensembliste de partition d'un ensemble.

I.3 Probabilités

Définition 8 (Probabilité)**.**
Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ *un espace probabilisable. Une* ***probabilité*** *est une application*

$$\begin{array}{rccc} P: & \mathcal{T} & \longrightarrow & [0,1] \\ & A & \longmapsto & P(A) \end{array}$$

telle que :

1. $P(\Omega) = 1$
2. *(*$\sigma-$*additivité de* P*)* $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$*) est une famille* ***dénombrable*** *d'événements* **2 à 2 incompatibles***, alors*

$$P\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

C'est la somme totale d'une série convergent (absolument).

Définition 9 (Espace probabilisé)**.**
Un ***espace probabilisé*** *est un triplet* $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ *tel que* $(\Omega, \mathcal{T})$ *est un espace probabilisable et* P *est une probabilité sur cet espace.*

Définition 10 (Ensembles négligeables, presque sûrs)**.**
$(\Omega, \mathcal{T}, P)$ *un espace probabilisé.*

- *On dit que* $A \in \mathcal{T}$ *est* ***négligeable*** *si et seulement si*

$$P(A) = 0$$

- *On dit que* $A \in \mathcal{T}$ *est* ***presque sûr*** *si et seulement si*

$$P(A) = 1$$

Proposition 3 (Propriétés de base d'une probablité)**.**
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ *un espace probabilisé. On a alors*

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. *Si* A_1, A_2,...,A_n *sont des événements incompatibles deux à deux alors :*

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

3. *Notamment si* A *et* B *sont des événements incompatibles alors :*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

4. *Soit* A *un événement. Alors* $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
5. *Soient* A *et* B *deux événements tels que* A *implique* B *(i.e.* $A \subset B$*). Alors*

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A) \qquad et \qquad P(A) \leqslant P(B)$$

Démonstration :

I.4 Rappels : Cas d'une probabilité sur un univers fini

Soit P une probabilité sur $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Définissons les réels $p_i = P(\{\omega_i\})$ pour $i \in [\![1, n]\!]$. Ces réels on alors les propriétés suivantes :

1. Pour tout i de $[\![1, n]\!]$ on a $p_i \geqslant 0$
2. $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Réciproquement, soient $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de réels ayant les propriétés 1 et 2 précédentes. Alors il existe une unique probabilité P sur Ω telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \qquad P(\{\omega_i\}) = p_i$$

Un cas particulier important : l'équiprobabilité

Définition 11 (équiprobabilité)**.**

Considérons toujours un univers fini Ω. *On dit qu'il y a* ***équiprobabilité*** *lorsque*

$$\forall (\omega, \eta) \in \Omega^2 \qquad P(\{\omega\}) = P(\{\eta\}).$$

Dans ce cas, on a alors

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad P(\{w_i\}) = \frac{1}{n} = \frac{1}{\text{Card }(\Omega)}$$

La probabilité ainsi obtenue est appelée **probabilité uniforme** sur Ω.
De plus, si $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\}$ est un événement, alors

$$P(A) = P(\{\omega_{i_1}\}) + P(\{\omega_{i_2}\}) + \cdots + P(\{\omega_{i_k}\}) = \frac{k}{n} = \frac{\text{Card }(A)}{\text{Card }(\Omega)}.$$

Lorsque la probabilité P sur l'univers Ω est uniforme alors la probabilité d'un événement A est :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre de possibles favorables à } A}{\text{Nombre total de possibles}}.$$

Quand sait- on qu'il y a équiprobabilié ?

- L'énoncé le précise de façon claire.
- On trouve dans l' énoncé les adjectifs : « honnête », « non truqué », « non pipé »...ou la locution « au hasard »
- L' énoncé ne dit rien.

Exemple : dès honnête : il y a équiprobabilité, pièce truquée : il n'y a pas équibrobabilité.

Attention : Ne pas utiliser $P(A) = \dfrac{\text{Nombre de possibles favorables à } A}{\text{Nombre total de possibles}}$. lorsqu'il n'y a pas équiprobabilité !

I.5 Cas d'une probabilité sur univers dénombrable

Exemple : On lance une pièce jusqu'à obtenir un résultat "Face". on pose alors

$$\Omega = \{F, PF, PPF, PPPF, PPPPF, \dots\}$$

Si Ω est un univers dénombrable, on montre comme dans le cas d'un univers fini qu'une probabilité P sur $\Omega = \{\omega_n / \ n \in \mathbb{N}\}$ est caractérisée par la donnée des probabilités des événements élémentaires $\{\omega_n\}$

Plus précisément, les réels $p_n = P(\{\omega_n\})$ vérifient les deux propriétés suivantes :

1. $\forall i \in \mathbb{N} \quad p_i \geqslant 0$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$

Réciproquement on admet que si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de réels ayant les propriétés 1 et 2 précédentes. Alors il existe une unique probabilité P sur Ω telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P(\{\omega_n\}) = p_n$$

Attention : On ne peut pas avoir avoir équiprobabilité sur un univers dénombrable !

Exemple : . On choisit $\Omega = \mathbb{N}$ et on choisit la probabilités suivante :

$p_0 = P(0) = \dfrac{1}{2}$ $p_1 = P(1) = \dfrac{1}{4}$ et de faon générale

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad p_n = P(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

On a bien $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$

Dans ce cas on peut par exemple calculer la probabilité d'avoir un nombre pair de pile.

II Probabilité conditionnelle et indépendance

II.1 Probabilité conditionnelle

Définition 12 (Probabilité conditionnelle)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ *un espace probabilisé et* B *un événement de probabilité non nulle alors on note*

$$\begin{array}{rccl} P_B : & \mathcal{T} & \to & [0;1] \\ & B & \mapsto & P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \end{array}$$

C'est la ***probabilité conditionnelle*** *de* A *sachant* B*.*

Notation et vocabulaire :
On trouve aussi la notation :

$$P_B(A) = P(A|B)$$

Théorème 1.
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ *un espace probabilisé et* $B \in \mathcal{T}$ *tel que* $P(B) \neq 0$*. Alors* P_B *est une probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{T})$

Démonstration :

II.2 Indépendance

Définition 13 (Indépendance de deux événements)**.**
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ *un espace probabilisé. On dit que* A *est* B *sont* ***indépendants*** *si et seulement si*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Exemple : On lance successivement 2 dés ; on considère que la probabilité est uniforme.

Içi $\Omega = [\![1, n]\!]$ et $\mathscr{T} = \mathscr{P}(\Omega)$) Alors les événements A_i : « le premier résultat est i » et B_j : « le deuxième résultat est j » sont indépendants.

On dit que les lancers sont indépendants

Récipoquement si on suppose que A_i et B_j sont indépendants et que le dé est non truqué, alors la probabilité sur Ω est uniforme.

Proposition 4 (Lien entre indépendance et probabilité conditionelle)**.**
Soit $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ *un espace probabilisé.*

- *Soit B un événement de probabilité non nulle alors A et B son indépendants si et seulement si* $P_B(A) = P(A)$
- *Si A et B sont deux événements indépendants alors A et $\overline{B}$ le sont aussi.*

Attention : l'indépendance dépend de l'espace probabilisé choisi.

Pas vraiement au programme

Définition 14 (Indépendance 2 à 2 de n événements)**.**
Soit $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ *un espace probabilisé. On dit que n événements* $A_1, A_2, \ldots, A_n$. *sont* ***2 à 2 indépendants*** *lorsque*

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \qquad i \neq j \Rightarrow P(A_i \cap A_j) = P(A_i).P(A_j).$$

Définition 15 (Indépendance mutuelle d'une famille d'événements)**.**

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ *un espace probabilisé. On dit que* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sont* ***mutuellement indépendants*** *lorsque pour tout entier* $k \in [\![2, n]\!]$ *et pour toute famille d'indices* $(i_1, \ldots, i_k)$ *tels que* $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$$

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite (infinie) d'événements, On dit que ces événements sont* ***mutuellement indépendants*** *lorsque pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $A_0, A_1, \ldots, A_n$ *sont mutuellement indépendants.*

Attention : Si des événements sont mutuellement indépendants, ils sont, de façon immédiate, indépendants deux à deux. Mais la réciproque est fausse.

Exercice : On lance une pièce non truquée, et on note

- A : « On obtient un pile au premier lancer ».
- B : « On obtient un pile au deuxième lancer ».
- C : « On obtient deux résultat différents ».

Montrer que A, B et C sont indépendants deux à deux mais pas mutuellement indépendants.

Proposition 5 (Passage au complémentaire)**.**
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ *un espace probabilisé.*

1. *Si les événements* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *sont* ***mutuellement indépendants*** *alors les événements* $B_1, B_2, \dots, B_n$ *où* $B_k = A_k$ *ou* $\overline{A_k}$ *sont aussi mutuellement indépendants.*
2. *Si la suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est formée d'événements mutuellement indépendants, on posant pour chaque entier* $B_n = A_n$ *ou* $B_n = \overline{A_n}$ *alors la suite* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est formée d'événements mutuellement indépendants*

Démonstration :

III Les grands théorèmes

III.1 Formule des probabilités totales

Théorème 2 (Formule des probabilités totales)**.**
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ *un espace probabilisé.*
Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *un système complet d'événements*
Alors, pour tout événement $E \in \mathcal{T}$

- $$P(E) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_n \cap E)$$
- $$P(E) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_n) P_{A_n}(E)$$

  avec la convention que si $P(A_n) = 0$ *alors, même si la probabilité conditionnelle n'est pas définie* $P(A_n)P_{A_n}(E) = 0$

Remarque : On peut facilement adapter ces résultats au cas où le système complet d'événement est fini

Démonstration :

♋

Proposition 6 (extension)**.**
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ *un espace probabilisé.*

Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite d'événements deux à deux incompatibles tels que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$$

Alors, pour tout événement $E \in \mathcal{T}$

•
$$P(E) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_n \cap E)$$

•
$$P(E) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_n) P_{A_n}(E)$$

avec la convention que si $P(A_n) = 0$ *alors même si la probabilité conditionnelle n'est pas définie* $P(A_n)P_{A_n}(E) = 0$

Démonstration :

♋

III.1.a Une application

On dispose d'une infinité d'urnes numérotées 0,1,2,...,n. Dans l'urne n il y a $n+1$ boules dont une seule est noire.
On choisit une urne selon la règle : « l'urne n à la probabilité $\dfrac{1}{2^{n+1}}$ d'être choisie » . Puis on choisit au hasard une boule dans l'urne n.
Question : Quelle est la probabilité d'avoir une boule noire ?

Question subsidiaire : Comment réaliser « physiquement »cette expérience?, comment simuler cette expérience avec python.

III.2 Formule des probabilités composées

III.2.a Le théorème

Théorème 3 (Formule des probabilités composées)**.**

Soit n un entier plus grand que 2.
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ *un espace probabilisé, et* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *des événements tels que*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$$

Alors

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_2 \cap A_1}(A_3) \cdots P_{A_{n-1} \cap \dots \cap A_2 \cap A_1}(A_n)$$

.

III.3 Théorème de Bayes

III.3.a Un premier exemple

On dispose d'un test qui permet de décéler une maladie. Ce test fonctionne de la manière suivante :

- Si le patient testé est malade, la probabilité que le test soit positif est de 99%.
- Si le patient est sain la probabilité que le test soit positif (faux positif) est de 5%

On sait de plus qu'une personne sur 10 000 est malade.
On choisit une personne au hasard, on la teste et le test se révèle négatif. Calculer la probabilité que cette personne soit malade.

III.3.b Le théorème

Théorème 4 (Formule de Bayes)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ *un espace probabilisé.*

- *Soit* $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *un système complet d'événements tel que*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad P(A_k) \neq 0$$

Alors pour tout événement $E \in \mathcal{T}$ *et pour tout* $i_0 \in \mathbb{N}$

$$P_E(A_{i_0}) = \frac{P_{A_{i_0}}(E) P(A_{i_0})}{\sum_{k=0}^{+\infty} P_{A_k}(E) P(A_k)} = \frac{P_{A_{i_0}}(E) P(A_{i_0})}{P(E)}$$

- *Soit* $(A_1; \dots; A_n)$ *un système complet d'événements tel que*

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad P(A_k) \neq 0$$

Alors pour tout événement $E \in \mathcal{T}$ *et pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$

$$P_E(A_{i_0}) = \frac{P_{A_{i_0}}(E))P(A_{i_0})}{\sum_{k=1}^{n} P_{A_k}(E)P(A_k)} = \frac{P_{A_{i_0}}(E)P(A_{i_0})}{P(E)}$$

Démonstration :

On rappelle que si B et C sont deux événements :

$$P(C \cap D) = P_D(C)P(D) = P_C(D)P(C)$$

Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un sysème complet d'événements et E un événement. Soit $i_0 \in \mathbb{N}$.

$$P_E(A_{i_0}) = \frac{P(E \cap A_{i_0})}{P(E)} = \frac{P_{A_{i_0}}(E)P(A_{i_0})}{P(E)} = \frac{P_{A_{i_0}}(E)P(A_{i_0})}{\sum_{k=0}^{+\infty} P_{A_k}(E)P(A_k)}$$

La dernière égalité est obtenue en utilisant la formule des probabilités totales.